

Câu 1: (1.5 điểm) Cho biểu thức: $A = \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$.

a) Tìm x để giá trị của A được xác định. Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên.

Câu 2: (1.5 điểm) Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^4 + 4$

b) $x^4 + 2020x^2 + 2019x + 2020$.

Câu 3: (2 điểm) Tìm số tự nhiên n để:

a, $A = n^3 - n^2 + n - 1$ là số nguyên tố.

b, $B = n^5 - n + 2$ là số chính phương. ($n \in \mathbb{N}; n \geq 2$)

Câu 4: (1.5 điểm)

a) Giải phương trình: $\frac{1}{x^2 + 9x + 20} + \frac{1}{x^2 + 11x + 30} + \frac{1}{x^2 + 13x + 42} = \frac{1}{18}$

b) Cho a, b, c là 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

Câu 5: (0.5 điểm) Cho $a > b > 0$ so sánh 2 số x, y với:

$$x = \frac{1+a}{1+a+a^2}; \quad y = \frac{1+b}{1+b+b^2}$$

Câu 6: (3 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A ($AC > AB$), đường cao AH ($H \in BC$). Trên tia HC lấy điểm D sao cho $HD = HA$. Đường vuông góc với BC tại D cắt AC tại E.

a) Chứng minh rằng hai tam giác BEC và ADC đồng dạng. Tính độ dài đoạn BE theo $m = AB$.

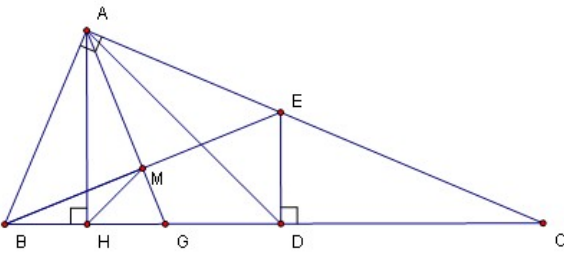
b) Gọi M là trung điểm của đoạn BE. Chứng minh rằng hai tam giác BHM và BEC đồng dạng. Tính số đo của góc AHM

c) Tia AM cắt BC tại G. Chứng minh: $\frac{GB}{BC} = \frac{HD}{AH + HC}$.

-----Hết-----
Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1 (1.5đ)	<p>Cho biểu thức: $A = \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$.</p> <p>a) Tìm x để giá trị của A được xác định. Rút gọn biểu thức A. b) Tìm giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên.</p>	
	<p>a)</p> <p>+) A được xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ 8 - 4x + 2x^2 - x^3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ 4(2 - x) + x^2(2 - x) \neq 0 \end{cases}$</p> <p>$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ (2 - x)(4 + x^2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ 2 - x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$</p> <p>+) ĐKXD : $x \neq 2; x \neq 0$</p>	0.25
	<p>* Rút gọn :</p> <p>Ta có $A = \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$</p> $= \left(\frac{x^2 - 2x}{2(x^2 + 4)} - \frac{2x^2}{4(2 - x) + x^2(2 - x)} \right) \left(\frac{x^2 - x - 2}{x^2} \right)$ $= \frac{(x^2 - 2x)(2 - x) - 4x^2}{2(x^2 + 4)(2 - x)} \cdot \frac{x^2 + x - 2x - 2}{x^2}$ $= \frac{2x^2 - x^3 - 4x + 2x^2 - 4x^2}{2(x^2 + 4)(2 - x)} \cdot \frac{x(x + 1) - 2(x - 1)}{x^2}$ $= \frac{-x(x^2 + 4)}{2(x^2 + 4)(2 - x)} \cdot \frac{(x + 1)(x - 2)}{x^2} = \frac{x + 1}{2x}$	0.75
	<p>b) Tìm giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên.</p> <p>* $\frac{x + 1}{2x} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x + 1 : 2x \Rightarrow 2x + 2 : 2x$ Mà $2x : 2x$</p> <p>$\Rightarrow 2 : 2x \Rightarrow 1 : x \Rightarrow x = 1$ hoặc $x = -1$</p> <p>* Ta thấy $x = 1$ hoặc $x = -1$ (TMĐKXD)</p> <p>+) Vậy $A = \frac{x + 1}{2x} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -1$</p>	0.5
Câu 2 (1.5đ)	<p>Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:</p> <p>a) $x^4 + 4$ b) $x^4 + 2020x^2 + 2019x + 2020$.</p>	
	<p>a) $x^4 + 4 = (x^4 + 4x^2 + 4) - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2$ $= (x^2 + 2 + 2x)(x^2 + 2 - 2x)$</p>	0.5
	<p>b) $x^4 + 2020x^2 + 2019x + 2020 = (x^4 - x) + (2020x^2 + 2020x + 2020)$</p>	0.5
	<p>$= x(x - 1)(x^2 + x + 1) + 2020(x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2020)$</p>	0.5
	Tìm số tự nhiên n để:	

Câu 3 (2đ)	a, $A = n^3 - n^2 + n - 1$ là số nguyên tố. b, $B = n^5 - n + 2$ là số chính phương. ($n \in \mathbb{N}; n \geq 2$)	
	a) $p = n^3 - n^2 + n - 1 = (n^2 + 1)(n - 1)$	0.25
	+) Nếu $n = 0$; 1 không thỏa mãn đề bài +) Nếu $n = 2$ thỏa mãn đề bài vì $p = (2^2 + 1)(2 - 1) = 5$ +) Nếu $n > 3$ không thỏa mãn đề bài vì khi đó p có từ 3 ước trở lên là 1; $n - 1 > 1$ và $n^2 + 1 > n - 1 > 1$	0.5
	- Vậy $n = 2$ thì $p = n^3 - n^2 + n - 1$ là số nguyên tố	0.25
	b) $B = n^5 - n + 2 = n(n^4 - 1) + 2 = n(n + 1)(n - 1)(n^2 + 1) + 2$ $= n(n - 1)(n + 1)[(n^2 - 4) + 5] + 2 = n(n - 1)(n + 1)(n - 2)(n + 2) + 5n(n - 1)(n + 1) + 2$	0.5
	mà $n(n - 1)(n + 1)(n - 2)(n + 2) : 5$ (tích của 5 số tự nhiên liên tiếp) và $5n(n - 1)(n + 1) : 5$ Vậy B chia 5 dư 2	0.25
	Do đó số B có tận cùng là 2 hoặc 7 nên B không phải số chính phương Vậy không có giá trị nào của n để B là số chính phương	0.25
Câu 4 (1.5 đ)	a) Giải phương trình : $\frac{1}{x^2 + 9x + 20} + \frac{1}{x^2 + 11x + 30} + \frac{1}{x^2 + 13x + 42} = \frac{1}{18}$ b) Cho a, b, c là 3 cạnh của một tam giác . Chứng minh rằng : $\frac{a}{b + c - a} + \frac{b}{a + c - b} + \frac{c}{a + b - c} \geq 3$	
	Ta có $\begin{cases} x^2 + 9x + 20 = (x + 4)(x + 5) \\ x^2 + 11x + 30 = (x + 6)(x + 5) \\ x^2 + 13x + 42 = (x + 6)(x + 7) \end{cases}$ $\Rightarrow DKXD: x \neq -4; x \neq -5; x \neq -6; x \neq -7$	0.25
	Phương trình trở thành : $\frac{1}{(x + 4)(x + 5)} + \frac{1}{(x + 5)(x + 6)} + \frac{1}{(x + 6)(x + 7)} = \frac{1}{18}$ $\frac{1}{x + 4} - \frac{1}{x + 5} + \frac{1}{x + 5} - \frac{1}{x + 6} + \frac{1}{x + 6} - \frac{1}{x + 7} = \frac{1}{18}$ $\frac{1}{x + 4} - \frac{1}{x + 7} = \frac{1}{18}$ $18(x + 7) - 18(x + 4) = (x + 7)(x + 4)$ $(x + 13)$	0.25
	Từ đó tìm được $x = -13$; $x = 2$ và kết luận đúng	0.25
	b) Đặt $b + c - a = x > 0$; $c + a - b = y > 0$; $a + b - c = z > 0$ Từ đó suy ra $a = \frac{y + z}{2}$; $b = \frac{x + z}{2}$; $c = \frac{x + y}{2}$;	0.25

	$\Rightarrow A = \frac{y+z}{2x} + \frac{x+z}{2y} + \frac{x+y}{2z} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) \right]$	0.5
	Từ đó suy ra $A \geq \frac{1}{2}(2+2+2)$ hay $A \geq 3$	0.25
Câu 5 (0.5 đ)	Cho $a > b > 0$ so sánh 2 số x, y với : $x = \frac{1+a}{1+a+a^2}$; $y = \frac{1+b}{1+b+b^2}$	
	Ta có $x, y > 0$ và $\frac{1}{x} = \frac{1+a+a^2}{1+a} = 1 + \frac{a^2}{1+a} = 1 + \frac{1}{\frac{1+a}{a^2}} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a}} > 1 + \frac{1}{\frac{1}{b^2} + \frac{1}{b}} = \frac{1}{y}$	0.5
	Vì $a > b > 0$ nên $\frac{1}{a^2} < \frac{1}{b^2}$ và $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$. Vậy $x < y$.	
Câu 6 (3 đ)		0.25
	a) Hai tam giác ADC và BEC có: \widehat{C} -chung. $\frac{CD}{CE} = \frac{CA}{CB}$ (Hai tam giác vuông CDE và CAB đồng dạng) Do đó, $\triangle BEC \sim \triangle ADC$ (c.g.c).	0,5
	Suy ra: $\widehat{BEC} = \widehat{ADC} = 135^\circ$ (vì tam giác AHD vuông cân tại H theo giả thiết), nên $\widehat{AEB} = 45^\circ$ do đó tam giác ABE vuông cân tại A. Suy ra: $BE = AB\sqrt{2} = m\sqrt{2}$	0.25
	b) Ta có: $\frac{BM}{BC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{BE}{BC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AD}{AC}$ (do $\triangle BEC \sim \triangle ADC$)	0.25
	mà $AD = AH\sqrt{2}$ (tam giác AHD vuông cân tại H) nên $\frac{BM}{BC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AD}{AC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AH\sqrt{2}}{AC} = \frac{BH}{AB\sqrt{2}} = \frac{BH}{BE}$ (do $\triangle ABH \sim \triangle CBA$)	0.5
	Do đó $\triangle BHM \sim \triangle BEC$ (c.g.c), suy ra: $\widehat{BHM} = \widehat{BEC} = 135^\circ \Rightarrow \widehat{AHM} = 45^\circ$	0.25
	c) Tam giác ABE vuông cân tại A, nên tia AM còn là phân giác \widehat{BAC} . $\Rightarrow \frac{GB}{GC} = \frac{AB}{AC}$,	0.25
	mà $\frac{AB}{AC} = \frac{ED}{DC}$ ($\triangle ABC \sim \triangle DEC$) $= \frac{AH}{HC}$ ($ED \parallel AH$) $= \frac{HD}{HC}$	0.5
	Do đó: $\frac{GB}{GC} = \frac{HD}{HC} \Rightarrow \frac{GB}{GB+GC} = \frac{HD}{HD+HC} \Rightarrow \frac{GB}{BC} = \frac{HD}{AH+HC}$	0.25

Chú ý:

- Học sinh làm cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa.
- Học sinh không vẽ hình hoặc vẽ sai cơ bản thì không chấm bài hình.

