Ứng dụng của bất biến và nửa bất biến trong toán tổ hợp

Mở đầu :

Bất biến là một trong những khái niệm trung tâm của toán học. Nó có mặt trong hầu hết các lĩnh vực của Toán học: Đại số, Hình học, Tô-pô, Lý thuyết số, Xác suất, Phương trình vi phân … Chẳng hạn, các bất biến được sử dụng trong việc nghiên cứu các đồ thị phẳng (định lý Kuratowsky), giải tích hàm (chứng minh định lý về điểm bất động Brawer hay chứng minh hình cầu không đồng phôi với xuyến. Khó có định lý về phân loại (nhóm, đại số, đồ thị …) nào lại thiếu sự có mặt của các bất biến. Có hẳn một lý thuyết bất biến nghiên cứu các dạng bất biến đại số của các biến đổi tuyến tính.

Nhưng bất biến không phải là một khái niệm gì cao siêu mà các học sinh phổ thông bình thường không gặp và không hiểu được. Đôi khi bất biến chỉ là tính chẵn lẻ, là sự chia hết cho 3, là tính đối xứng của một trạng thái, là sự bảo toàn góc … tức là những điều rất dễ hiểu và nhận thấy. Việc đưa ý niệm về bất biến cho các em học sinh, đặc biệt là học sinh chuyên toán có ý nghĩa nhất định trong việc phát triển tư duy toán học, nhìn thấy cái tĩnh trong cái động của học sinh.

A.Bất biến

1) Định nghĩa: Bất biến là những đại lượng (hay tính chất) không thay đổi trong quá trình chúng ta thực hiện các phép biến đổi.

Chẳng hạn khi thực hiện phép tịnh tiến thì khoảng cách giữa hai điểm sẽ không thay đổi. Với phép vị tự thì khác: khoảng cách có thể sẽ thay đổi, nhưng sẽ có một bất biến khác, đó là tỷ lệ giữa hai đoạn thẳng. Một ví dụ khác về bất biến: Lấy một số nguyên dương N (viết trong hệ thập phân). Phép biến đổi T biến N thành tổng các chữ số của N. Đó chính là bất biến.

2)Ví dụ minh họa: Trên bảng, người ta viết các số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến 99 sau đó thực hiện trò chơi như sau: mỗi lần xóa hai số bất kỳ và viết một số mới bằng tổng hai số đã xóa. Việc làm này thực hiện liên tục cho đến khi còn một số trên bảng. Hỏi số cuối cùng còn lại trên bảng là bao nhiêu? Tại sao?

Lời giải. Vì mỗi lần thực hiện trò chơi thì thay hai số bằng tổng của chúng nên tổng các số trên bảng không thay đổi trong mọi thời điểm. Tổng các số lúc đầu là

$$1+2+3+...99=\frac{(1+99).99}{2}=4950$$

Suy ra số cuối cùng là 4950.

Nhận xét. Bất biến trong bài toán trên là tổng của các số trên bảng không thay đổi trong mọi thời điểm. Với mọi cách thực hiện trò chơi thì số cuối cùng còn lại trên bảng là 4950.

B. Nửa bất biến

1) Định nghĩa: Nửa bất biến là một đại lượng luôn thay đổi, nhưng chỉ theo một chiều (tức là tăng lên hay giảm xuống)

2) Ví dụ minh họa :Cho 2n điểm trên mặt phẳng, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Chúng minh rằng những điểm này có thể phân thành n cặp sao cho các đoạn thẳng nối chúng không cắt nhau.

Lời giải: Đầu tiên ta phân cặp các điểm một cách ngẫu nhiên và nối chúng lại với nhau. Gọi S là tổng các đoạn thẳng được nối (Chú ý rằng , do chúng ta có hữu hạn cách phân cặp nên tập giá trị của S là hữu hạn) .Nếu có hai đoạn thẳng AB và CD cắt nhau tại o thì ta thay Ab, CD bằng AC , BD . Vì AB + CD = (AO + OB) + (CO + OD) = (AO + OC) + (BO + OD) > AC + BD theo bất đẳng thức tam giác, nên nếu cặp đoạn thẳng nào đó giao nhau, ta có thể thay thế cách nối để S giảm xuống . Vì S chỉ có hữu hạn các giá trị nên một lúc nào đó quá trình phải dừng. Và khi đó , sẽ không có các cặp đoạn thẳng giao nhau

C. Một số bài tập

Bài 1: Trên bảng, người ta viết các số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến 999 sau đó thực hiện trò chơi như sau: mỗi lần xóa hai số bất kì và viết một số mới bằng hiệu hai số đã xóa(lấy số lớn trừ số nhỏ). Việc làm này thực hiện liên tiếp cho đến khi còn một số trên bảng. Hỏi số cuối cùng còn lại trên bảng có thể là 1 không? Tại sao?

Lời giải: Ta thấy rằng nếu xóa đi hai số a,b(a > b) và thay bằng hiệu a − b thì tổng các số trên bảng giảm đi một đại lượng là a + b − (a − b) = 2b là số chẵn. Như vậy tổng các số trên bảng không thay đổi tính chẵn lẻ tại mọi thời điểm thực hiện trò trơi. Tổng các số lúc đầu là:

$$1+2+3+...+999=\frac{(1+999).999}{2}=499500$$

là số chẵn. Suy ra số còn lại cuối cùng là số chẵn và do đó không thể là số 1.

Nhận xét : Bất biến của bài toán là tổng của các số trên bảng không thay đổi tính chẵn lẻ tại mọi thời điểm dựa vào đặc điểm tổng các số giảm đi một lượng chẵn.

Bài 2: Trên bảng, người ta viết 100 chữ số 1 và 10 chữ số 2 sau đó thực hiện trò chơi như sau: mỗi lần xóa hai số bất kỳ và viết một số mới bằng tích hai số đã xóa. Việc làm này thực hiện liên tục cho đến khi còn một số trên bảng. Hỏi số cuối cùng trên bảng còn lại là bao nhiêu? Tại sao?

Lời giải: Vì mỗi lần thực hiện trò chơi thay hai số bằng tích của chúng nên tích các số trên bảng không thay đổi trong mỗi thời điểm. Tích các số lúc đầu là 1100 × 210 = 1024 nên số còn lại cuối cùng là 1024.

Nhận xét: Bất biến của bài toán trên là tích các số trên bảng không thay đổi trong mọi thời điểm.

Bài 3: Trên bảng, người ta viết các số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến 100 sau đó thực hiện trò chơi như sau: mỗi lần xóa hai số bất kỳ và viết một số mới bằng tổng lập phương của hai số đã cho. Việc làm này thực hiện liên tục cho đến khi còn một số trên bảng. Hỏi số cuối cùng còn lại trên bảng có thể là 9876543212008 hay không? Tại sao?

Lời giải. Ta thấy rằng nếu xóa hai số a,b(a > b) và thay bằng tổng lập phương a3 + b3 thì tổng các số trên bảng tăng một đại lượng là:

a3 +b3 −(a+b) = (a3 −a)+(b3 − b)

là số chia hết cho 3 Tổng các số trên bảng lúc đầu và tổng các số trên bảng tại mọi thời điểm kém nhau một bội số của 3. Tổng các số lúc đầu là

$$1+2+3+...+100=\frac{(1+100).100}{2}=5050$$

là số chia cho 3 dư 1(vì tổng các chữ số của 5050 bằng 10 chia 3 dư 1). Suy ra số còn lại cuối cùng phải là số chia 3 dư 1. Số 987654321 chia hết cho 3 vì tổng các chữ số của số này là 45 chia hết cho 3. Suy ra 9876543212008 chia hết cho 3. Vậy số còn lại cuối cùng không thể là 9876543212008.

Nhận xét. Bất biến của bài toán trên là tổng các số trên bảng tại mọi thời điểm hơn kém nhau một bội số của 3.

Bài 4. Cho số tự nhiên có 8 chữ số là 12456789. Từ số này người ta đổi vị trí các chữ số của nó, hỏi có thể tạo được số chính phương hay không?

Lời giải. Tại mọi thời điểm thay đổi vị trí các số hạng thì số được tạo thành có tổng các chữ số là:
1 +2+4 +5 +6+7 +8 +9 = 42

chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9. Suy ra số được tạo thành chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9 nên không thể là số chính phương.

Nhận xét. Bất biến của bài toán chính là tổng của các số được tạo thành luôn không đổi bằng 42.

Bài 5. Xét một bảng vuông 4×4 ô. Tại mỗi ô của bảng vuông có chứa dấu + hoặc dấu −. Mỗi một lần thực hiện, cho phép đổi dấu của tất cả các ô trên cùng một hàng hoặc cùng một cột. Giả sử bảng vuông ban đầu có một dấu + và 15 dấu −. Hỏi có thể đưa bảng ban đầu về bảng có toàn dấu cộng được không?

Lời giải. Câu trả lời là không. Và lời giải khá đơn giản. Thay dấu cộng bằng số 1 và dấu trừ bằng −1. Xét tích tất cả các số trên bảng vuông. Khi đó, qua mỗi phép biến đổi, tích này không thay đổi (vì sẽ đổi dấu 4 số). Vì vậy, cho dù ta thực hiện bao nhiêu lần, từ bảng vuông (1,15) sẽ chỉ đưa về các bảng vuông có số lẻ dấu −, có nghĩa là không thể đưa về bảng có toàn dấu cộng.

Nhận xét. Việc thay dấu cộng bằng số 1 và dấu trừ bằng số −1 để tìm ra bất biến của bài toán trên. Bất biến của nó là tích của các số trên bảng không thay đổi qua mỗi lần thực hiện.

Bài 6. Trên một cái bảng, người ta viết 2008 dấu (+) và 2009 dấu (−). Giả sử mỗi lần, hai dấu bất kỳ bị xóa đi và viết thay bởi một dấu (+) nếu chúng giống nhau và thay bằng một dấu (−) nếu chúng khác nhau. Sau khi thực hiện 4016 lần như vậy, dấu nào sẽ còn lại trên bảng

.Lời giải. **(i) Cách 1.** Sau mỗi lần xóa, số các dấu (−) được giữ nguyên hoặc giảm đi 2. Vì thế, tính chẵn lẻ của số dấu (−) trên bảng không thay đổi. Ban đầu, số dấu trừ là số lẻ nên cuối cùng dấu còn lại trên bảng là dấu (−).

(ii) Cách 2. Thay mỗi dấu (+) bởi số 1, thay mỗi dấu (−) bởi số −1. Khi đó mỗi lần thực hiện cách làm theo đề bài có thể mô tả dưới dạng như sau: hai số bất kỳ được xóa đi và thay bằng tích của chúng. Nhu vậy tại mọi thời điểm thực hiện thì tích của các số trên bảng không thay đổi. Ban đầu tích các số trên bảng là −1 nên cuối cùng tích các số trên bảng cũng là −1. Vậy dấu còn lại trên bảng là dấu (−).

(iii) Cách 3. Thay mỗi dấu (+) bởi số 0, thay mỗi dấu (−) bởi số 1. Khi đó, tổng hai số bị xóa đi cùng tính chẵn lẻ với số được viết thay chúng, như vậy tổng các số trên bảng không thay đổi tính chẵn lẻ. Vì tổng các số lúc đầu bằng 2009, là số lẻ nên số còn lại cuối cùng là số lẻ. Do đó dấu còn lại trên bảng là dấu (−).

Nhận xét.

• Trong cách 1, đại lượng bất biến là tính chẵn lẻ của số dấu (−) trên bảng.

• Trong cách 2, đại lượng bất biến là tích tất cả các số trên bảng.

• Trong cách 3, đại lượng bất biến là tính chẵn lẻ của tổng các số trên bảng.

Ta có thể lập một tình huống mới tương đương với tình huống được xác định ở điều kiện và yêu cầu trong bài toán để dễ tìm đại lượng bất biến.

Bài 7. Ngoài biển đông, trên một hòn đảo sinh sống ba giống thằn lằn có ba loại màu: màu xám có 133 con, màu nâu có 155 con và màu đỏ có 177 con. Nếu hai con thằn lằn khác màu

gặp nhau thì chúng đồng thời đổi sang màu thứ ba (ví dụ nếu thằn lằn màu xám gặp thằn lằn màu nâu thì cả hai con đều đổi sang màu đỏ). Trong những trường hợp hai con thằn lằn cùng màu gặp nhau thì chúng giữ nguyên không đổi màu. Có xảy ra tình trạng là trên đảo tất cả thằn lằn cùng một màu được không?

Lời giải. Đặc điểm của bài toán này nằm ở bộ số 133, 155, 177 vì khi chia cho 3 ta được bộ số dư 1, 2 và 0. Ta thử xét nếu một con thằn lằn xám gặp một con thằn lằn nâu, thì chúng đồng thời đổi màu đỏ. Khi đó ta có 132 con xám, 154 con nâu và 179 con đỏ. Những số dư của 132, 154 và 179 cho 3 tương ứng là 0, 1 và 2, nghĩa là gặp đầy đủ các số dư đã có. Nếu một con thằn lằn xám gặp con thằn lằn màu đỏ, thì chúng đồng thời đổi màu nâu. Khi đó ta có 132 thằn lằn xám, 157 thằn lằn nâu và 176 thằn lằn đỏ. Lấy những số trên chia cho 3 cho số dư tương ứng là 0, 1, 2 nghĩa là gặp lại cả ba khả năng của số dư. Nếu con thằn lằn nâu và thằn lằn đỏ gặp nhau, thì chúng cùng đổi màu xám. Khi đó có 135 thằn lằn xám, 154 thằng lằn nâu và 176 thằn lằn đỏ. Số dư của những số thằn lằn trên chia cho 3 tương ứng là 0, 1 và 2, vẫn có đầy đủ các số dư khi chia cho 3. Dù thay đổi màu thế nào thì số dư của các số lượng thằn lằn chia cho 3 đều có đầy đủ ba số là 0, 1, 2. Số lượng tất cả thằn lằn trên đảo là 133 + 155 + 177 = 465 là một số chia hết cho 3. Nếu tất cả thằn lằn cùng một màu thì số dư lượng thằn lằn màu xám, màu nâu, và đỏ chia cho 3 có dư tương ứng là 0, 0, 0. Điều này vô lý vì các số dư phải có đầy đủ các số dư khi chia cho 3. Như vậy câu trả lời là không được.

Nhận xét. Bất biến ở đây là dù thay đổi màu thế nào thì số dư của các số lượng thằn lằn chia cho 3 đều có đầy đủ ba số là 0, 1, 2.

Bài 8. Những số 1,2,3,...,1974 được viết trên một bảng. Người ta thay hai số bất kỳ bằng một số hoặc là tổng hoặc là hiệu của hai số đó. Chứng minh rằng sau 1973 lần thực hiện thao tác trên, chỉ còn một số còn lại trên bảng không thể là số 0.

Lời giải. Ta quan tâm đến tính chẵn lẻ của các số đã cho và sau mỗi lần thao tác được số chẵn lẻ như thế nào. Khi bắt đầu trên bảng có 987 số lẻ. Mỗi lần ta thực hiện thay đổi, số của những số lẻ hoặc là còn nguyên (khi ta lấy hai số có tính chẵn lẻ khác nhau hoặc hai số cùng tính chẵn) hoặc là giảm đi hai số (khi ta lấy hai số cùng tính lẻ). Như vậy số các số lẻ còn lại sau mỗi lần thực hiện thay đổi luôn là một số lẻ. Vậy khi còn lại một số cuối cùng trên bảng thì nó phải là số lẻ, do đó nó không thể là số 0.

Nhận xét. Bất biến của bài toán là số các số lẻ sau mỗi phép biến đổi còn lại là số lẻ.

Bài 9. Mỗi số trong các số $a_1, a_2, ..., a_n$ nhận một trong hai giá trị là −1 hoặc 1. Biết rằng:
$S = a_1a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5 + ... + a_na_1a_2a_3$
Hãy chứng minh rằng n chia hết cho 4.

Lời giải. Đây là một bài toán lý thuyết số, nhưng ta vẫn sẽ dùng bất biến để giải nó.

Tính bất biến này như sau: S sẽ không thay đổi số dư khi chia cho 4 nếu như ta đổi dấu của 4 số hạng liên tiếp. Thật vậy, nếu có 2 số dương và 2 số âm thì sẽ không có chuyện gì thay đổi, nếu có 1 số khác dấu 3 số còn lại thì khi đổi dấu giá trị của S sẽ thay đổi 4 hoặc –4 và điều này không ảnh hưởng gì tới số dư của S khi chia cho 4 cả, cuối cùng nếu 4 số cùng dấu thì khi đổi dấu S sẽ thay đổi một đại lượng là 8 hay –8 điều này dĩ nhiên cũng không ảnh hưởng gì tới số dư của S khi chia cho 4. Bây giờ quay lại bài toán của chúng ta. Ta thực hiện thuật toán đổi dấu của 4 số hạng liên tiếp sao cho cuối cùng đưa tất cả n số thành số dương. Khi đó S = n và theo tính bất biến thì S chia hết cho 4 (vì ban đầu S = 0 chia hết cho 4) Vậy n chia hết cho 4. Ta đã có kết luận cho bài toán.

Nhận xét. S sẽ không thay đổi số dư khi chia cho 4 nếu như ta đổi dấu của 4 số hạng liên tiếp.

Bài 10. Hai người chơi cờ, mỗi ván người thắng được 2 điểm, người thua được 0 điểm, nếu trận hòa thì mỗi người được 1 điểm. Hỏi sau một số ván cờ có thể xảy ra trường hợp một người được 9 điểm và người kia được 10 điểm hay không?

Lời giải. Tổng số điểm của hai người trong mỗi ván luôn bằng 2. Suy ra tại mọi thời điểm thì tổng điểm của hai người luôn là số chẵn. Mà 9+10 = 19 là số lẻ nên không thể xảy ra trường hợp một người được 9 điểm và người kia được 10 điểm.

Nhận xét. Bất biến của bài toán là tổng điểm của hai người trong mỗi ván luôn bằng 2.

Bài 11. Có 1981 tách uống trà đặt trên một bàn. Lúc đầu tất cả các tách đều được đặt ngửa lên. Giả sử mỗi lần người ta làm cho 200 tách trong chúng lật ngược lại. Hỏi sau một số lần như vậy, có thể làm cho tất cả các tách đều úp xuống được không?
Lời giải. Nếu có 1981 tách, ta không thể quay úp xuống tất cả được. tại mỗi thời điểm có x tách đặt ngửa được làm úp xuống và có $200-x$ tách úp xuống được lật ngửa lên. Do đó số các tách đang úp đã thay đổi đi một số là $|200-2x|$, và đây là một số chẵn. Điều này có nghĩa là số các tách đặt úp xuống không bị thay đổi về tính chẵn lẻ. Ban đầu số này bằng 0, là số chẵn. Do đó không thể thay đổi số này thành 1981, là số lẻ.

Nhận xét. Bất biến của bài toán là các tách đang úp luôn thay đổi một lượng chẵn. Trong đề toán ta có thể thay đổi 1981 bằng một số lẻ bất kỳ và 200 bằng một số chẵn bất kỳ nhỏ hơn số ban đầu.

Bài 12. Có 2005 đồng xu, mỗi đồng xu có hai mặt, một mặt màu xanh và một mặt màu đỏ. Xếp các đồng xu trên bảng sao cho các mặt màu xanh ngửa lên. Thực hiện trò chơi như sau: mỗi lần thực hiện cho phép đổi bốn mặt của bốn đồng xu tùy ý. Hỏi có thể nhận được kết quả mà tất cả các đồng xu đều có mặt đỏ ngửa lên trên được không?

Lời giải. Thay mỗi đồng xu mặt màu xanh ngửa lên trên bởi số −1. Thay mỗi đồng xu màu đỏ ngửa lên trên bởi số (+1). Khi đó mỗi cách thực hiện theo đề bài có thể mô tả dưới dạng khác như sau: bốn số bất kỳ được xóa đi và thay mỗi số bằng số đối của nó. Ban đầu có 2005 số (−1) tương ứng với 2005 đồng xu có mặt màu xanh ngửa lên trên. Ta thấy rằng nếu thay bốn số a,b,c,d bởi bốn số −a,−b,−c,−d thì tích của các số mới thay vào là

$$(-a)(-b)(-c)(-d) = abcd$$

bằng tích của các số ban đầu. Như vậy tại mọi thời điểm thì tích của các số không đổi. Ban đầu có 2005 số −1 nên tích của chúng là (−1), suy ra tại mọi thời điểm tích các số luôn là (−1). Vậy không thể nhận được kết quả mà tất cả các đồng xu đều có mặt đỏ ngửa lên trên.

Nhận xét. Bài toán trên được thay đổi để dễ tìm bất biến hơn, bất biến là trong mọi thao tác thì tích các chữ số là không đổi.

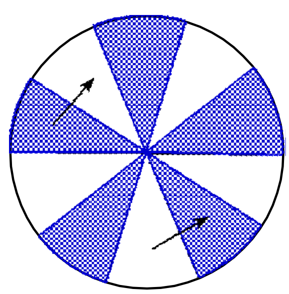
Bài 13. Trong dãy 1,9,9,9,8,..., mỗi chữ số bắt đầu từ chữ số thứ năm bằng chữ số hàng đơn vị của tổng bốn chữ số liền trước nó. Hỏi trong dãy này có gặp các bộ 1234 và 5678 không?

Lời giải. Ta thay mỗi chữ số của dãy đã cho bằng số 0 nếu nó là số chẵn và bằng số 1 nếu nó là số lẻ. Ta nhận được dãy số 111101111011110..., trong đó cứ sau bốn chữ số 1 có một chữ số 0 và cứ sau mỗi số 0 có bốn chữ số 1. Các bộ số 1234 và 5678 ứng với các bộ 4 chữ số 1010 và 1001 nên không thể có mặt trong dãy số đã cho.

Nhận xét. Đây là bài toán tôi rất thích, nó thể hiện được tư duy chuyển bài toán khó thành bài toán dễ để có thể phát hiện được bất biến. Rõ ràng để nguyên rất khó để tường minh được lời giải, tuy nhiên khi chuyển hóa thì bất biến chính là cứ sau bốn chữ số 1 có một chữ số 0 và cứ sau mỗi số 0 có bốn chữ số 1.

Bài 14. Một hình tròn được chia thành 10 ô hình quạt, trên mỗi ô người ta đặt 1 viên bi. Nếu ta cứ di chuyển các viên bi theo quy luật: mỗi lần lấy ở 2 ô bất kì mỗi ô 1 viên bi, chuyển sang ô liền kề theo chiều ngược nhau thì có thể chuyển tất cả các viên bi về cùng 1 ô hay không?

Lời giải:



Trước tiên, ta tô màu xen kẽ các ô hình quạt, như vậy sẽ có 5 ô được tô màu (ô màu) và 5 ô không được tô màu (ô trắng). Ta có nhận xét : Nếu di chuyển 1 bi ở ô màu và 1 bi ở ô trắng thì tổng số bi ở 5 ô màu không đổi. Nếu di chuyển ở 2 ô màu, mỗi ô 1 bi thì tổng số bi ở 5 ô màu giảm đi 2. Nếu di chuyển ở 2 ô trắng, mỗi ô 1 bi thì tổng số bi ở 5 ô màu tăng lên 2. Vậy tổng số bi ở 5 ô màu hoặc không đổi, hoặc giảm đi 2 hoặc tăng lên 2. Nói cách khác, tổng số bi ở 5 ô màu sẽ không thay đổi tính chẵn lẻ so với ban đầu. Ban đầu tổng số bi ở 5 ô màu là 5 viên (là số lẻ) nên sau hữu hạn lần di chuyển bi theo quy luật trên thì tổng số bi ở 5 ô màu luôn khác 0 và khác 10, do đó không thể chuyển tất cả các viên bi về cùng 1 ô.

Nhận xét. Bài toán được giải dễ dàng bằng cách tô màu xen kẽ các ô hình quạt. Trong rất nhiều bài toán thì việc tô màu chính là ý tưởng chính để giải bài toán. Và bất biến trong bài toán này là tổng số bi ở 5 ô màu sẽ không thay đổi tính chẵn lẻ.

Bài 15. Mỗi số trong dãy
21,22,23,...,22005

đều được thay thế bởi tổng các chữ số của nó. Tiếp tục làm như vậy với các số nhận được cho tới khi tất cả các số trong dãy đều có 1 chữ số. Chứng minh trong dãy này: số các số 2 nhiều hơn số các số 1.

Lời giải. Ta thấy : "Số tự nhiên A và tổng các chữ số của A luôn cùng số dư trong phép chia cho 9".
Mặt khác ta có : 21 chia cho 9 dư 2; 22 chia cho 9 dư 4; 23 chia cho 9 dư 8; 24 chia cho 9 dư 7; 25 chia cho 9 dư 5; 26 chia cho 9 dư 1; 27 chia cho 9 dư 2;...
Do đó 26k + r lần lượt nhận các số dư trong phép chia cho 9 là 2, 4, 8, 7, 5, 1 tương ứng với các giá trị của r là 1, 2, 3, 4, 5, 0. Dãy cuối cùng nhận được gồm 2005 số thuộc tập hợp {2;4;8;7;5;1}. Ta có $2005 = 334 \times 6 + 1$ nên dãy cuối cùng có 335 số 2 (nhiều hơn số các số khác 1 số). Vậy số các số 2 nhiều hơn số các số 1 đúng 1 số.

Nhận xét. Bài toán trên xuất phát từ tính chất trong số học. Số tự nhiên A và tổng các chữ số của A luôn cùng số dư trong phép chia cho 9 và dãy các số dư khi chia an cho m luôn tuần hoàn (có thể không xuất phát từ chỉ số đầu tiên). Và bất biến của bài toán là dãy số trên được chuyển thành dãy các số dư của nó 248751248751...

Bài 16. Một tờ giấy bị cắt nhỏ thành 6 mảnh hoặc 11 mảnh. Các mảnh nhận được lại có thể chọn để cắt (thành 6 mảnh hoặc 11 mảnh nhỏ hơn),...Cứ như vậy ta có thể nhận được 2005 mảnh cắt không ?

Lời giải. Sau mỗi lần cắt một mảnh giấy thành 6 mảnh hoặc 11 mảnh thì số mảnh giấy tăng lên là 5 hoặc 10. Như vậy tính bất biến của bài toán là "số mảnh giấy luôn tăng lên một bội số của 5”. Vậy số mảnh giấy sau các lần cắt có dạng 1+5k, mặt khác 2005 có dạng 5k nên với cách cắt như trên, từ một tờ giấy ban đầu, ta không thể cắt được thành 2005 mảnh.

Nhận xét. Bất biến của bài toán là số mảnh giấy tăng lên luôn là một bội số của 5.

Bài 17. Ta xét bảng 4 hàng 4 cột bao gồm những dấu + và dấu − như sau:

+	+	−	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+

Người ta có thể đồng thời thay đổi dấu của tất cả các dấu trong một hàng bất kỳ, một cột bất kỳ, hoặc trong một đường bất kỳ mà nó song song với một trong những đường chéo(thực tế người ta có thể thay đổi dấu ở 4 góc). Có khả năng hay không nhận được một bảng không chứa dấu − nào?

Lời giải. Ta xét bảng thứ hai như sau:

0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	0	1
0	1	1	0

Bảng này có tính chất: trong mỗi hàng, mỗi cột hoặc những đường thẳng song song với đường chéo có đúng hai số 1 hoặc không có số 1 nào. Bây giờ ta gọi những phần tử trong bảng thứ nhất là phần tử tốt nếu nó được đặt vào đúng vị trí có số 1 như ở bảng thứ hai. Sau khi ta thay đổi dấu thì chỉ có thể xảy ra một trong ba trường hợp sau:

• Trường hợp 1. Hai dấu + phần tử tốt được chuyển thành hai dấu − phần tử tốt.

• Trường hợp 2. Hai dấu − phần tử tốt được chuyển thành hai dấu − phần tử tốt.

• Trường hợp 3. Một cặp phần tử tốt gồm một dấu + và một dấu − chuyển đổi cho nhau.

Như vậy số lượng dấu − phần tử tốt luôn là số lẻ. Do đó luôn tồn tại ít nhất một dấu − trên bảng.

Bài 18. Có hai đống đá, một đống có n hòn và đống kia có k hòn. Cứ mỗi phút một máy tự động lại chọn một đống có số hòn đá là chẵn và chuyển một nửa số hòn đá của đống đá được chọn sang đống kia (nếu cả hai đống đều có số hòn đá là chẵn thì máy sẽ chọn ngẫu nhiên một đống). Nếu trong hai đống số hòn đá đều là lẻ thì máy sẽ ngừng làm việc. Hỏi tồn tại bao nhiêu cặp thứ tự (n,k), với n và k là các số tự nhiên không vượt quá 1000, để máy tự động sau khoảng thời gian hữu hạn sẽ dừng.

Lời giải. Giả sử n = 2au và k = 2bv, với u và v là các số lẻ. Chúng ta sẽ chứng minh rằng máy tự động nhất thiết sẽ dừng đối với các cặp và chỉ các cặp số (n,k) với a = b. Nếu a = b thì từ cặp (n,k) máy tự động có thể nhận được cặp (2a−1u,2a−1(u+v)) hoặc (2a−1(2u+v),2a−1v). Vì các số (2u + v) và (2v + u) lại là lẻ, nên máy tự động đã làm giảm số mũ của 2 xuống 1 đơn vị. Qua a bước thì số mũ này trở nên bằng 0, và máy tự động sẽ dừng lại. Bây giờ giả sử a < b(trường hợp a > b xét tương tự). Nếu a 6 b−2, thì từ cặp (n,k) máy tự động có thể nhận được cặp (2a(u+2b−1−av),2b−1v) với các số mũ trong lũy thừ của 2 khác nhau. Nếu a = b−1, thì từ cặp (n,k) máy tự động có thể nhận được cặp (2a(u+v),2au) = 2a +1u+v,2au lại với các số mũ trong lũy thừa của 2 khác nhau. Dễ dàng thấy rằng trong trường hợp này máy tự động sẽ làm việc mãi mãi không dừng. Chỉ còn việc đếm các cặp số khả dĩ. Có 500 số lẻ không vượt quá 1000, bởi vậy số cặp (n,k) = (2au,2bv) với a = b = 0 bằng 5002; có 250 số không vượt quá 1000 chia hết cho 2 và không chia hết cho 4, bởi vậy số lượng cặp với a = b = 1 bằng 2502. Cứ tiếp tục như vậy, ta nhận được đáp số của bài toán:

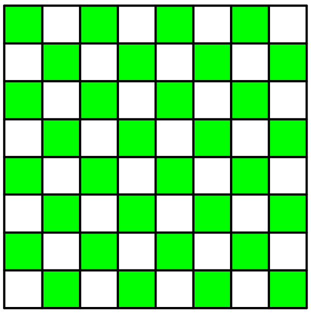
5002 +2502 +1252 +632 +312 +162 +82 +42 +22 +12 = 333396

Bài 19. Trên bảng viết 10 dấu cộng và 15 dấu trừ. Với 24 lần thực hiện, mỗi lần xóa đi 2 dấu bất kì rồi lại thêm vào 1 dấu (cộng hoặc trừ) để cuối cùng trên bảng chỉ còn lại 1 dấu duy nhất. Biết rằng dấu được thêm vào sẽ là dấu trừ nếu trước đó đã xóa đi 2 dấu khác nhau, ngược lại dấu được thêm vào sẽ là dấu cộng. Hỏi dấu còn lại trên bảng là dấu gì ?

Lời giải. Ta thấy, nếu xóa đi 2 dấu cộng thì phải thêm vào 1 dấu cộng, vì vậy số dấu trừ trên bảng không thay đổi. Nếu xóa đi 2 dấu trừ thì phải thêm vào 1 dấu cộng, vì vậy số dấu trừ giảm đi 2. Nếu xóa đi 1 dấu cộng và 1 dấu trừ thì phải thêm vào 1 dấu trừ, vì vậy số dấu trừ trên bảng không thay đổi. Như vậy, tính bất biến là : sau mỗi lần thực hiện việc xóa và thêm dấu, số dấu trừ trên bảng hoặc không thay đổi hoặc giảm đi 2. Mặt khác, số dấu trừ ban đầu là số lẻ nên sau mỗi lần thực hiện thì số dấu trừ còn lại trên bảng bao giờ cũng là số lẻ. Sau 24 lần thực hiện, trên bảng chỉ còn lại 1 dấu duy nhất mà dấu trừ không thể mất hết nên dấu còn lại trên bảng phải là dấu trừ.

Bài 20. Cho một bàn cờ quốc tế 8×8. Hỏi rằng quân mã có thể đi nước đầu tiên từ ô dưới cùng bên trái và kết thúc ở ô trên cùng bên phải hay không? Với điều kiện nó phải đi qua tất cả các ô trên bàn cờ và mỗi ô chỉ đi qua đúng một lần

Lời giải. Ta tô các ô trên bàn cờ xen kẽ các màu đen trắng như bàn cờ vua(hình dưới)



Do sự "bình đẳng màu" nên không mất tính tổng quát ta có thể giả sử rằng ô dưới cùng bên trái có màu trắng. Từ cách đi của con mã ta nhận thấy rằng sau mỗi nước đi con mã sẽ sang một ô khác màu với ô mà nó đang đứng. Vì thế sau một số lẻ nước đi con mã sẽ ở ô màu đen, sau một số chẵn nước đi con mã sẽ ở ô màu trắng. Đây là tính bất biến của chúng ta. Trở lại bài toán ta thấy rằng đi từ ô dưới cùng bên trái lên ô trên cùng bên phải cần đi 63 nước đi. Vì thế ô trên cùng bên phải sẽ cần mang màu đen (theo như tính bất biến). Điều này là vô lý. Vậy quân mã không thể đi từ ô dưới cùng bên trái nên ô trên cùng bên phải như yêu cầu của đầu bài được.

Nhận xét. Bài toán đã được giải quyết nhưng xung quanh bài toán này vẫn còn rất nhiều điều cần phải suy nghĩ. Chẳng hạn như khi xét bàn cờ $X \times X$ với X là một số lẻ thì liệu có một cách đi từ ô dưới cùng bên trái lên ô trên cùng bên phải và thoả mãn các yêu cầu của bài toán hay không? Nếu có thì hãy chỉ ra một cách đi như thế? Câu hỏi này khá khó.

Bài 21. Cho một bảng ô vuông chứa số như hình 4a . Ta thực hiện một thuật toán T như sau: Chọn ra 2 số bất kì nằm ở hai ô vuông cạnh nhau và cộng 2 số đó với một số nguyên nào đó. Hỏi rằng sau một số lần thực hiện thuật toán T thì bảng hình vuông chứa các số như hình 4a có thể thành bảng hình vuông như hình 4b hay không?

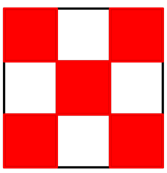
1	2	3
4	5	6
7	8	9

Hình 4a

7	8	9
6	2	4
3	5	1

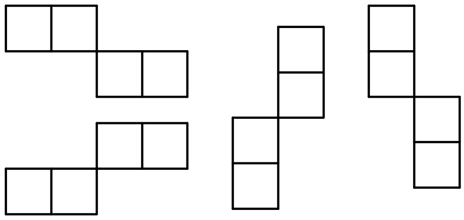
Hình 4b

Lời giải. Tô màu các ô của hình vuông như hình dưới đây.



Đặt B là tổng các số ở các ô màu đen và W là tổng các số ở các ô màu trắng. Ta thấy vì mỗi lần thực hiện thuật toán T ta cộng thêm 2 số ở 2 ô cạnh nhau với một số nguyên nên dễ thấy rằng hiệu B−W là không đổi. Nhưng với giả thuyết của bài toán thì ở hình 4a thì B−W = 5, còn ở hình 4b thì B − W = −1. Điều này trái với quy tắc bất biến ở trên. Vậy sau những lần thực hiện thuật toán T thì từ hình 4a ta không thể nhận được hình 4b.

Bài 22: (VMO 2006). Xét bảng ô vuông m × n (m,n là các số nguyên dương lớn hơn 3). Thực hiện trò chơi sau: mỗi lần đặt 4 viên bi vào 4 ô của bảng (mỗi ô 1 viên) mà 4 ô đó tạo thành một trong các hình dưới đây:



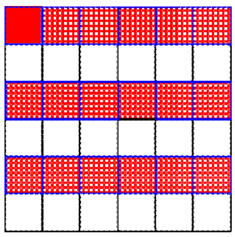
Hỏi sau một số lần ta có thể nhận được bảng mà số bi trong các ô bằng nhau được không nếu:

a) m = 2004 và n = 2006?

b) m = 2005 và n = 2006?

Lời giải.a) Bảng đã cho có thể chia thành các hình chữ nhật 4×2 nên có thể nhận được trạng thái mà số bi trong các ô bằng nhau.

b) Tô màu các ô của bảng như hình vẽ (tô các hàng 1,3,...,2005).



Dễ thấy, mỗi lần đặt bi có 2 viên được đặt vào các ô được tô màu và 2 viên được đặt vào các ô không tô màu. Do đó, nếu gọi S(n) là số bi trong các ô được tô màu và T(n) là số bi trong các ô không được tô màu sau lần đặt bi thứ n thì S(n)−T(n) là bất biến. Ta có

$$S(n) - T(n) = S(0) - T(0) = 0, \qquad \forall n > 0$$

Do đó, nếu nhận được bảng mà số bi trong các ô bằng nhau thì số ô được tô màu và số ô không được tô màu bằng nhau. Điều này không thể xảy ra vì m là số lẻ.

Bài 23:Các số tự nhiên 0,1,2,3,... được viết trong các ô của một bảng ô vuông kính thức 2003×2003 theo vòng xuáy trôn ốc(xoay ngược kim đồng hồ) sao cho số 0 nằm ở ô trung tâm (tâm của bảng). Các dòng và cột của bảng được đánh số tăng dần từ dưới lên trên và từ trái sang phải (bắt đầu từ số 1).

a) Số 2004 nằm ở dòng nào, cột nào? Vì sao?

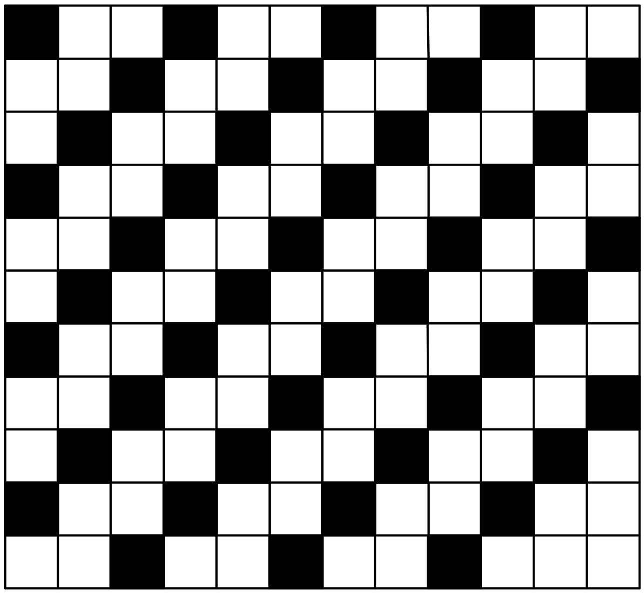
b) Thực hiện thuật toán sau: lần đầu tiên, thay số 0 ở ô trung tâm bởi số 1998; mỗi lần tiếp theo, cho phép lấy ra 12 số trong 12 ô liên tiếp trong cùng một hàng hoặc trong cùng một cột hoặc trung cùng một hình chữ nhật 3×4 rồi tăng mỗi số đó lên một đơn vị. Hỏi sau một số lần như vậy ta có thể làm cho tất cả các số trong bảng đều là bội của 2004 hay không? Tại sao?

	20	19	18	17	16	
	21	6	5	4	15	
	22	7	0	3	14	
	23	8	1	2	13	
	24	9	10	11	12	

Lời giải.a) Xét hình vuông cạnh $2n + 1$ có tâm là ô chứa số 0; số được viết ở đỉnh dưới, bên trái của hình vuông này là $(2n+1)2 - 1$ (ví dụ các số 8,24,...).

Vì $(2 \times 22 + 1)2 - 1 = 2024$ và số 0 nằm ổ ô dòng số 1002, cột số 1002 nên số 2024 nằm ở hàng số $1002 - 22 = 980$ và cột số $1002 - 22 = 980$. Vậy số 2004 nằm ở hàng số $980 + 20 = 1000$ và cột số 980.

a) Ta tô màu các ô của bản như hình vẽ.



Gọi S(n) là tổng các số trong các ô được tô màu ở bước thứ n. Do mỗi lần thực hiện thuật toán (kể từ lần thứ 2) có đúng 4 ô được tô màu nên

S(n+1) = S(n) +4, $\forall n > 1$

Do đó S(n) bất biến theo module 4. Suy ra

S(n) ≡ S(1) (mod 4), $\forall n > 1$

Ta xét số dư của S(0) khi chia cho 4:

Xét các đường chéo gồm những ô được tô màu, các đường chéo đó gồm một trong ba loại sau đây:

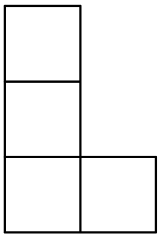
• Loại 1: chứa toàn các số chia hết cho 4 (đường chéo đi qua ô trung tâm).

• Loại 2: chứa toàn các số chia cho 4 dư 2. Do tính chất đối xứng của bảng nên có chẵn đường chéo loại này và như vậy tổng các số trên các đường chéo loại này chia hết cho 4.

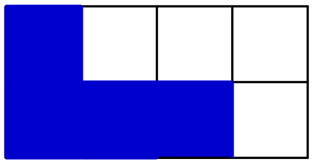
• Loại 3: chứa toàn các số lẻ: Trên mỗi đường chéo loại này có một nửa số ô chứa các số chia cho 4 dư 1 và một nửa số ô chứa các số chia cho 4 dư −1 và như vậy tổng các số trong các đường chéo loại này cũng chia hết cho 4.

Từ đó có S(0) ≡ 4 (mod 4), suy ra S(1) = S(0) + 1994 ≡ 2 (mod 4) hay S(n) ≡ 2 (mod 4), $\forall n > 1$ Vậy không thể có trạng thái mà tất cả các số trong bảng đều là bội của 2004 được.

Bài 24:. Xác định các số nguyên dương m,n sao cho bảng $m \times n$ có thể lát được bởi các quân hình chữ L dưới đây

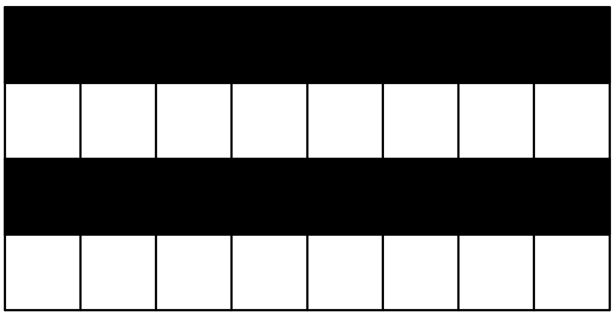


Lời giải. Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử m 6 n. Để lát được bảng thì $m > 2$,$n > 3$. Giả sử ta có thể lát được bảng bởi a quân hình chữ L, ta có $m.n = 4a$. Vì $m.n > 6$ nên $a > 2$. Xét $a = 2$, ta có bảng 2×4. Bảng 2×4 có thể lát được bởi hai quân chữ hình L như hình vẽ dưới đây



Với $a = 3$ ta có $m \times n = 12$ nên có hai bảng thỏa mãn là 2×6 và 3×4. Dễ dàng kiểm tra hai

bảng này đều không lát được bởi các quân hình chữ L. Điều đó khiến ta dự đoán, để lát được bảng bởi các quân hình chữ L thì a chẵn. Để chứng minh dự đoán này ta tô màu các ô của bảng như sau: Giả sử được m chẵn. Các ô ở dòng có thứ tự lẻ (tính từ trên xuống dưới) được tô màu đen, có ô ở dòng có thứ tự chẵn được tô màu trắng.



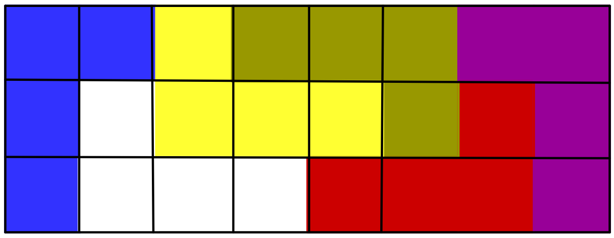
Khi đó, số ô đen và số ô trắng bằng nhau và bằng 2a. Mỗi quân hình chữ L lát vảo bảng chiếm 3 ô đen và 1 ô trắng hoặc chiếm 3 ô trắng và 1 ô đen. Giả sử lát được bởi x quan hình chữ L chiếm 3 ô đen và 1 ô trắng và y quân hình chữ L chiếm 3 ô trắng và 1 ô đen. Ta có hệ :

:

$$\begin{cases} x + y = a \\ 3x + y = 3y + x = 2a \end{cases}$$

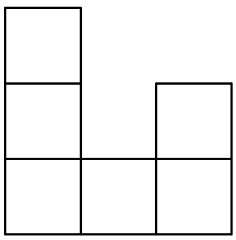
Suy ra x = y và a = 2x. Điều đó có nghĩa là a chẵn.

Bây giờ ta chứng minh nếu a chẵn, tức là m × n chia hết cho 8 thì có thể lát được bảng bởi các quân hình chữ L. Thật vậy, nếu m chia hết cho 2 và n chia hết cho 4 thì bảng có thể thành có hình chữ nhật 2 × 4 nên lát được. Nếu m lẻ và n chia hết cho 8 thì do m có thể được viết dưới dạng m = 2s+3 nên có thể chia bảng đã cho thành các hình chữ nhật 2×4 và 3×8. Do đó, nếu hình chữ nhật 3 × 8 lát được thì bảng đã cho sẽ lát được. Hình vẽ dưới đây chứng tỏ có thể lát được hình chữ nhật này.



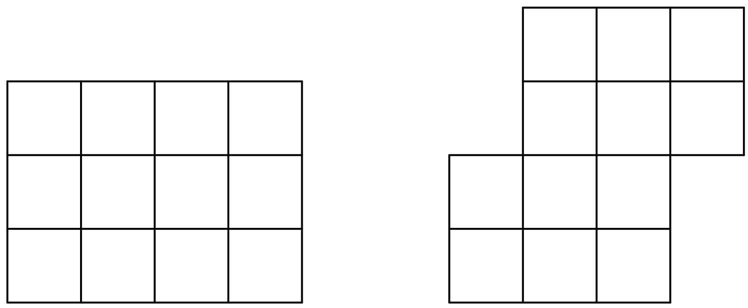
Vậy để lát được bảng đã cho bởi các quân hình chữ L thì điều kiện cần và đủ là m × n chia hết cho 8 và m,n > 2.

Bài 25: Ta định nghĩa viên gạch hình móc câu là hình gồm 6 ô vuông đơn vị như hình vẽ dưới đây, hoặc hình nhận được do lật hình đó (sang trái, sang phải, lên trên, xuống dưới) hoặc hình nhận được do xoay hình đó đi một góc.



Hãy xác định tất cả các hình chữ nhật m × n, trong đó m,n là các số nguyên dương sao cho có thể lát hình chữ nhật đó bằng các viên gạch hình móc câu.

Lời giải. Dễ thấy m,n $\in$ {1,2,5}. Chia hình chữ nhật m × n thành m × n ô vuông và đánh số các hàng, các cột từ dưới lên trên, tứ trái sang phải. Ta gọi ô (p,q) là ô nằm ở giao của hàng thứ p và cột thứ q. Hai viên gạch hình móc câu chỉ có thể ghép lại để được một trong hai hình dưới đây



(H1 (H2)

Do đó, để lát được hình chữ nhật m × n thì m.n phải chia hết cho 12. Nếu ít nhất một trong hai số m hoặc n chia hết cho 4 thì có thể lát được hình chữ nhật m×n. Thật vậy, giả sử được m chia hết cho 4. Nếu n chia hết cho 3 thì có thể chia hình chữ nhật m × n thành các hình chữ nhật 4×3, do đó có thể lát được. Nếu n không chia hết cho 3 thì có thể viết n dưới dạng n = 3a+4b với a,b là các số nguyên dương, do đó có thể lát được.

Bây giờ ta chứng minh một trong hai số m,n chia hết cho 4. Giả sử ngược lại, khi đó cả m và n chia hết cho 4 nhưng không chia hết cho 4. Để chứng minh điều này không xảy ra ta tạo bất biến. Để tạo bất biến ta điền các số vào các ô của hình chữ nhật theo quy tắc sau: Xét ô (p,q).

Nếu chỉ một trong hai tọa độ p và q chia hết cho 4 thì điền số 1 vào ô đó. Nếu chỉ một trong hai tọa độ p và q chia hết cho 4 thì điền số 2 vào ô đó. Với cách điền số như vậy ta thu được bất biến là tổng các số trong hình (H1) và tổng các số trong hình (H2) luôn là số lẻ. Do m,n chẵn nên tổng các số trong toàn bộ hình chữ nhật m × n là một số chẵn. Muốn lát được hình chữ nhật m×n thì tổng số hình (H1) và (H2) được sử dụng phải là số chẵn. Khi đó, m.n chia hết cho 24. Điều này không xảy ra vì cả m,n đều không chia hết cho 4.

Kết luận. Qua các ví dụ trên các bạn có thể thấy được sức mạnh của việc tìm ra các đại lượng bất biến trong mỗi bài toán tổ hợp. Các đại lượng bất biến xuất hiện trong tất cả các dạng của bài toán tổ hợp. Tìm ra cũng như phát hiện các đại lượng bất biến chính là con đường giải cũng như sáng tạo các bài toán liên quan đến nội dung này.

Bài 26:

Có 7 chiếc cốc cùng dung tích đang đựng nước theo thứ tự chiếm

$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{8},\frac{1}{9},\frac{1}{10}$ cốc.

Cho phép trút tất cả nước từ một cốc sang một cốc khác nếu nước không tràn ra ngoài hoặc đổ nước từ cốc này sang cốc khác cho đến khi đầy thì dừng lại. Hỏi có thể hay không sau một số lần đổ trước, một chiếc cốc nào đó chứa nước chiếm a/ $\frac{1}{12}$ cốc

b/ $\frac{1}{6}$ cốc ?

Lời giải

a/ Câu trả lời là " Có". Ta đổ tuần tự như sau:

- Đổ hết nước từ chiếc cốc thứ ba sang chiếc cốc thứ hai, khi đó chiếc cốc thứ hai sẽ chứa nước chiếm $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$ cốc.

- Sau đó, đổ nước từ chiếc cốc thứ hai sang chiếc cốc thứ nhất cho đến khi đầy thì lượng nước còn lại trong chiếc cốc thứ hai sẽ là $\frac{7}{12}-\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$ cốc.

b/ Câu trả lời là " Không". Trước hết ta chứng minh bằng quy nạp theo số lần rót rằng lượng nước ở trong một chiếc cốc không rỗng chỉ có thể là 1 hoặc là phần lẻ của tổng một số các phân số $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{8},\frac{1}{9},\frac{1}{10}$, trong đó ở các cốc khác nhau trong các tổng sẽ là các phân số khác nhau. Cơ sở quy nạp đúng.

Giả sử ở các cốc *A,B* có số lượng nước tương ứng là *a,b*. Nếu ta đổ nước từ cốc *A* sang cốc *B* thì lượng nước sau khi đổ sẽ là 0, $a + b$ hoặc nếu cốc B đầy thì sẽ là $a + b - 1$. Từ đó rõ ràng mệnh đề đúng.

Bây giờ giả sử $\frac{1}{6}=\{a_1+...+a_k\}$ với $a_i \in \left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{8},\frac{1}{9},\frac{1}{10}\right\}$. Ta chứng minh rằng trong tổng này không có các phân số $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{8},\frac{1}{9},\frac{1}{10}$. Thật vậy, nếu trong các phấn số này có ít nhất một trong hai số $\frac{1}{4}$ hay $\frac{1}{8}$, ít nhất một trong hai số $\frac{1}{5}$,$\frac{1}{10}$, hay chứa số $\frac{1}{9}$ thì mẫu số của phân số thu được sẽ chia hết cho 4, 5 và 9 tương ứng, trong khi 6 không chia hết cho các số này. Còn từ hai phân số $\frac{1}{2}$ và $\frac{1}{3}$ không thể tạo được phân số có phần lẻ bằng $\frac{1}{6}$.

Bài 27:

Một đường tròn được chia làm 6 cung, trên đó viết các số 1, 0, 1, 0, 0, 0 (theo chiều ngược chiều quay của kim đồng hồ). Mỗi một lần thực hiện bạn có thể cộng hai số ở cạnh nhau với 1. Hỏi có thể xảy ra trường hợp sau một số lần thực hiện, tất cả các số trên các cung tròn bằng nhau hay không?

Lời giải:

Gọi $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ là các số trên 6 cung tròn. Sau mỗi lần thực hiện phép biến đổi, đại lượng S=$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5$ luôn bằng 2 (bất biến). Do đó không thể xảy ra trường hợp tất cả các số trên các cung tròn đều bằng nhau vì trong trường hợp đó, ta sẽ có S=0.

Bài 28: Các số 1,2,3,...,20 được viết lên bảng. Mỗi phép biến đổi , ta xóa 2 số a và b và thêm vào số a+b-1. Số nào sẽ còn lại trên bảng sau 19 bước ?

Lời giải: Với bộ n số trên bảng ta xét đại lượng X bằng tổng các số trên bảng trừ đi n. Khi đó X không thay đổi trong các phép biến đổi. Lúc đầu X = (1 + 2 + ... + 20) – 20 =190. Sau 19 bước, X = 190 hay số còn lại sẽ là 191.

Sẽ không ngạc nhiên nếu một bạn đưa ra lập luận như sau: tại mỗi bước tổng giảm đi 1. Lúc đầu tổng là 210 , sau 19 bước số còn lại sẽ là 210 – 19 = 191. Cách giải này hiển nhiên đúng nhưng không làm rõ được ý tưởng của bất biến .

Bài 29Ở Vương quốc “Sắc màu kì ảo” có 45 hiệp sĩ: 13 hiệp sĩ tóc đỏ, 15 hiệp sĩ tóc vàng, 17 hiệp sĩ tóc xanh. Khi hai hiệp sĩ có màu tóc khác nhau gặp nhau, tóc của họ sẽ lập tức đổi sang màu thứ ba. Hỏi có thể có một lúc nào đó, tất cả các hiệp sĩ đều có màu tóc giống nhau?

Lời giải:

Giả sử tại một thời điểm nào đó, ta có a hiệp sĩ tóc đỏ, b hiệp sĩ tóc vàng và c hiệp sĩ tóc xanh thì t đặt $N = a - b \pmod 3$. Ta chứng minh N không thay đổi khi có sự đổi màu tóc.

Thật vậy:

+Nếu hiệp sĩ tóc đỏ gặp hiệp sĩ tóc vàng thì ta có $a \to a-1, \mathrm{b} \to \mathrm{b}-1, \mathrm{c} \to \mathrm{c}+2$, do đó $N \to (a-1)-(b-1) \pmod 3 = a-b \pmod 3$ không thay đổi.

+Nếu hiệp sĩ tóc đỏ gặp hiệp sĩ tóc xanh thì ta có $a \to a-1, \mathrm{b} \to \mathrm{b}+2, \mathrm{c} \to \mathrm{c}-1$, do đó $N \to (a-1)-(b+2) \pmod 3 = a-b \pmod 3$ không thay đổi.

+Nếu hiệp sĩ tóc vàng gặp hiệp sĩ tóc xanh thì ta có $a \to a+2, \mathrm{b} \to \mathrm{b}-1, \mathrm{c} \to \mathrm{c}-1$, do đó $N \to (a+2)-(b-1) \pmod 3 = a-b \pmod 3$ không thay đổi.

Vì ban đầu ta có $N = 13 - 15(\bmod 3) = 1(\bmod 3)$ nên trong quá trình biến đổi màu tóc, ta luôn có $N = 1(\bmod 3)$. Như thế không thể xảy ra trường hợp tất cả các hiệp sĩ có cùng màu tóc vì trong trường hợp này, N tương ứng sẽ bằng $0(\bmod 3)$ (do $(a, b, c) = (45, 0, 0)$ hoặc các hoán vị).

Bài 30:

Trên bảng có bốn số 3, 4, 5, 6. Mỗi một lần thực hiện, cho phép xóa đi hai số x, y có trên bảng và thay bằng $x + y + \sqrt{x^2 + y^2}$ và $x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$. Hỏi sau một số hữu hạn bước thực hiện, trên bảng có thể xuất hiện một số nhỏ hơn 1được không ?

Lời giải:

Đặt a = $x + y + \sqrt{x^2 + y^2}$, b = $x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$. Ta có

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{x + y + \sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{x + y - \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \frac{2(x + y)}{(x + y)^2 - (x^2 + y^2)} = \frac{x + y}{xy} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

Như vậy, qua các phép biến đổi, tổng nghịch đảo các số trên bảng không thay đổi. Vì $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{19}{20} < 1$ nên qua các lần biến đổi, tổng nghịch đảo các số trên bảng vẫn nhỏ hơn 1. Do các số trên bảng qua các phép biến đổi đều dương nên từ đây suy ra không có số nào nhỏ hơn 1.

Bài 31: Trên bàn có 100 viên kẹo. Hai người cùng thay phiên nhau bốc đi k viên kẹo, trong đó $k \in \{1, 2, 3\}$. Ai bốc được viên kẹo cuối cùng là người thắng. Hỏi ai là chiến thuật thắng ?

Lời giải:

Ta bắt đầu "quan sát" bài toán bằng 2 câu hỏi "khi nào thì người bốc sẽ chắc chắn thắng ?" và "khi nào thì người bốc sẽ chắc chắn thua ?"

Trường hợp dễ nhận thấy nhất là người bốc sẽ chắc chắn thắng khi trên bàn còn 1,2 hoặc 3 viên kẹo, và sẽ chắc chắn thua nếu chỉ còn 4 viên kẹo.

Tiếp tục quan sát, người bốc sẽ chắc chắn thắng nếu trên bàn còn 5, 6 hoặc 7 viên kẹo, vì khi đó người bốc sẽ có cách bốc để trên bàn chỉ còn 4 viên kẹo, dồn đối thủ vào thế thua.

Tương tự như vậy, người bốc sẽ thua nếu trên bàn còn 8 viên kẹo, vì dù có bốc thế nào đi nữa thì vẫn đưa đến trường hợp "5, 6 hoặc 7 viên" cho người bốc tiếp theo.

Như vậy, tính bất biến ở đây là: người chơi sẽ chiến thắng nếu có thể đưa số viên kẹo trên bàn về một số chia hết cho 4.

Vì 100 chia hết cho 4 cho nên với mọi cách bốc của người đi , người đi sau sẽ có cách bốc tương ứng để đảm bảo số kẹo còn lại luôn chia hết cho 4. Do đó người đi sau là người có chiến thuật thắng.

Bài 32: Vào năm 3000, ở Việt Nam một đồng nhân dân tệ (RMB) đổi được 10 đồng Việt Nam (VNĐ). Trong khi đó ở Trung Quốc, một VNĐ đổi được 10 RMB. Một du khách người Nhật lúc đầu có 1 VNĐ . Ông này có thể đi lại tùy ý giữa hai nước Việt Nam và Trung Quốc. Hỏi ông ta có thể làm cho số VNĐ và RMB ông ta có bằng nhau hay không ?

Lời giải : Xét X = số VNĐ - số RMB của du khách. Khi đó X mod 11 sẽ là bất biến trong các bước đổi tiền. Nếu số RMB và VNĐ bằng nhau thì $X \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 11)$. Lúc đầu ta có $X \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 11)$ do đó không thể thu được $X \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 11)$. Nên câu trả lời sẽ là không thể .

Bài 33 : Trên bảng có viết các số 1,2,3,4,5. Mỗi bước cho phép chọn hai số a,b và thay bởi a+b, ab. Hỏi có thể thu được 21,27,64,180,540 hay không ?

Lời giải : Bài toán thoạt nhìn khá đơn giản nhưng để tìm được bất biến không phải điều dễ dàng. Trước hết ta kiểm tra rằng các số chia hết cho 3 không giảm và số lượng này tăng khi và chỉ khi từ 2 số chia 3 dư 1 và chia 3 dư 2 chúng ta thu được một số chia hết cho 3 và một số chia hết cho 2. Vì vậy khi chúng ta lần đầu tiên chuyển sang trạng thái có 4 số chia hết cho 3 thì số còn lại chia 3 dư 2, nhưng 64 chia 3 dư 1 nên câu trả lời sẽ là không thể.

Bài 34: Tô đen 9 ô hình vuông 10 x 10. Mỗi lần tô màu đen một ô chưa tô nếu nó kề với ít nhất 2 ô đen (kề được hiểu là chung cạnh) . Có thể tô màu hết bàn cờ hay không ? nếu là 10 ô thì sao ? Nếu là hình vuông n x n thì lúc đầu cần tô đen ít nhất bao nhiêu ô để có thể tô đen cả bàn cờ?

Lời giải: Nếu tô 10 ô thì câu trả lời là khẳng định . Ví dụ ta có thể bắt đầu với 10 ô đen trên đường chéo chính của hình vuông. Nếu tô 9 ô thì câu trả lời là phủ định. Xét X là tổng chu vi của phần tô màu đen trên hình thì lúc đầu $X \leq 36$. Dễ kiểm tra X là nửa bất biến , cụ thể X không tăng. Nếu cả bàn cờ được tô màu thì lúc này X =40 mâu thuẫn . Vậy không thể to đen được cả bàn cờ nếu xuất phát với 9 ô màu đen.

Bài 35 : Các ô hình vuông được xếp kề nhau tạo thành một dải hình chữ nhật vô hạn về cả hai phía . Ta xếp vào các ô vuông một số hữu hạn các viên đá. Mỗi bước, chọn hai viên đá ở cùng ô và chuyển chúng sang hai ô bên cạnh khác hướng nhau.

a) Có thể sau một số hữu hạn bước quay lại vị trí ban đầu không ?

b) Có thể thực hiện vô hạn bước như vậy không?

c) Nếu quá trình dừng lại thì trạng thái sắp xếp cuối cùng có phụ thuộc vào quá trình thực hiện các bước không?

Lời giải : Gán cho mỗi viên đá ở ô thứ n số n^2. Xét tổng tất cả các số thu được . Rõ ràng mỗi phép biến đổi ta thay 2 số n^2 bởi số $(n-1)^2$ và $(n+1)^2$. Do đó tổng này tăng 2 đơn vị trong mỗi phép biến đổi . Suy ra sau một số hữu hạn bước không thể quay lại vị trí ban đầu .

Tiếp theo chúng ta đi chứng minh rằng tổng không thể tăng vô hạn bằng phương pháp quy nạp . Lưu ý rằng nếu tổng tăng vô hạn , nghĩa là có một số viên đá sẽ tiến ra xa vô hạn . Viên đá cuối cùng bên phải nhất luôn tăng chỉ số còn viên đá cuối cùng bên trái luôn giảm chỉ số . Do đó khoảng cách giữa hai viên đá này tăng vô hạn . Và đến một lúc nào đó sẽ có một viên không chịu tác động của các viên còn lại . Lập luận và lời giải phần b và c dành cho bạn đọc