CHUYÊN ĐỀ ĐƯỜNG TRÒN

A. LÝ THUYẾT

I. Sự xác định của đường tròn. Tính đối xứng của đường tròn

1. Định nghĩa

- Đường tròn tâm O bán kính R là hình gồm các điểm cách điểm O một khoảng bằng R
- Kí hiệu: $(O\,;R)$ hoặc (O)

2. Vị trí tương đối của điểm và đường tròn

Xét đường tròn $(O\,;R)$ và một điểm M.

- Điểm M nằm trong đường tròn khi $OM < R$
- Điểm M nằm trên đường tròn khi $OM = R$
- Điểm M nằm ngoài đường tròn khi $OM > R$

Chú ý:

- Để chứng minh một điểm thuộc đường tròn ta chứng minh khoảng cách từ điểm đó đến tâm của đường tròn bằng bán kính của đường tròn.
- Để chứng minh một số điểm cùng thuộc một đường tròn ta phải chỉ ra rằng các điểm đó cùng cách đều một điểm nào đó (điểm đó chính là tâm của đường tròn)

2. Cách xác định của đường tròn

Một đường tròn xác định khi:

- Biết tâm và bán kính của đường tròn
- Biết một đoạn thẳng là đường kính của đường tròn
- Khi biết ba điểm thuộc đường tròn

Chú ý:

- Qua ba điểm không thẳng hàng ta vẽ được một và chỉ một đường tròn
- Không vẽ được đường tròn nào đi qua ba điểm thẳng hàng
- Đường tròn đi qua ba đỉnh của một tam giác được gọi là *đường tròn ngoại tiếp* tam giác. Khi đó tam giác được gọi là *tam giác nội tiếp* đường tròn
- Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là giao điểm của ba đường trung trực của ba cạnh trong tam giác.

3. Tính đối xứng của đường tròn

- Đường tròn là hình có tâm đối xứng. Tâm của đường tròn là tâm đối xứng của đường tròn đó.
- Đường tròn là hình có trục đối xứng. Bất kì đường kính nào cũng là trục đối xứng của đường tròn.

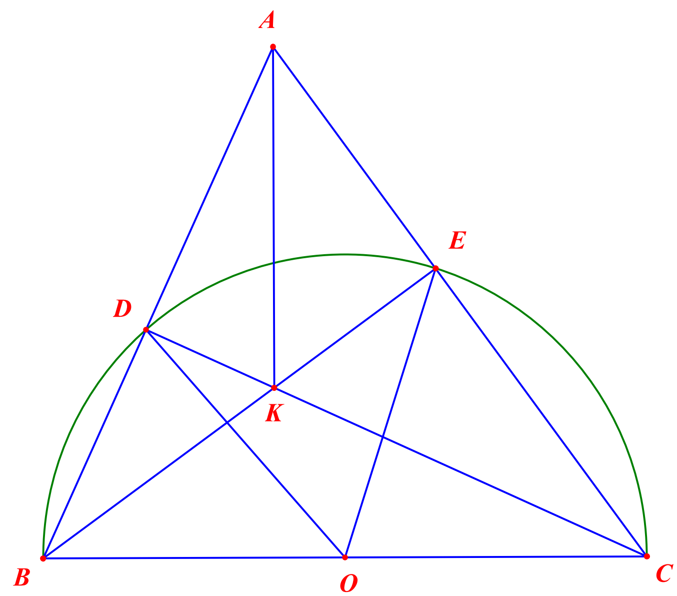
4. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Cho ΔABC có ba góc nhọn. Vẽ đường tròn (O) đường kính BC, nó cắt cạnh AB, AC lần lượt theo thứ tự ở D, E.

1. Chứng minh rằng: $CD \perp AB$ và $BE \perp AC$.

2. Gọi $K = BE \cap CD$. Chứng minh rằng: $AK \perp BC$.

Hướng dẫn giải



Lý thuyết cần nhớ:

- Trong tam giác vuông đường trung tuyến ứng với với cạnh huyền thì bằng nửa cạnh huyền
- Nếu trong tam giác có đường trung tuyến ứng với một cạnh và bằng nửa cạnh đó thì tam giác đó là tam giác vuông.

1. $OD = \frac{1}{2}BC \longrightarrow \Delta BCD$ vuông tại $D \longrightarrow CD \perp AB$.

$OE = \frac{1}{2}BC \longrightarrow \Delta BCE$ vuông tại $E \longrightarrow BE \perp AC$.

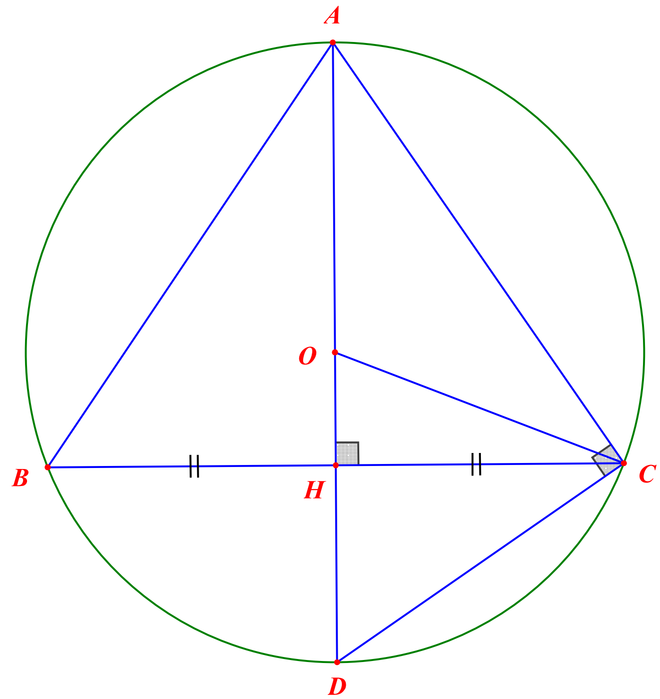
2. $K = BE \cap CD \longrightarrow K$ là trực tâm của $\Delta ABC \longrightarrow AK \perp BC$.

Ví dụ 2: Cho ΔABC cân tại A, $BC = 12cm$, đường cao $AH = 4cm$. Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Hướng dẫn giải

Gọi $D = AH \cap (O)$. ΔABC cân tại $A \longrightarrow AH$ là đường trung trực $\longrightarrow AD$ là đường kính

$OC = \frac{1}{2}AD \longrightarrow \Delta ACD$ vuông tại $C \longrightarrow CH^2 = AH.DH \longrightarrow DH = CH^2 : AH = 6^2 : 4 = 9cm$



$\longrightarrow AD = AH + DH = 4 + 9 = 13cm \longrightarrow R = 13:2 = 6,5cm$

II. Đường kính và dây của đường tròn

1. So sánh độ dài của đường kính và dây

- Trong một đường tròn đường kính là dây cung lớn nhất.

2. Quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây cung

- Trong một đường tròn đường kính vuông góc với một dây cung thì đi qua trong điểm của dây ấy.
- Trong một đường tròn đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy.

3. Ví dụ minh họa

Ví dụ 3: Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{B} = \widehat{D} = 90^0$. Chứng minh rằng:
1. Bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn.
2. So sánh AC và BD. Nếu $AC = BD$ thì tứ giác $ABCD$ là hình gì?

Hướng dẫn giải

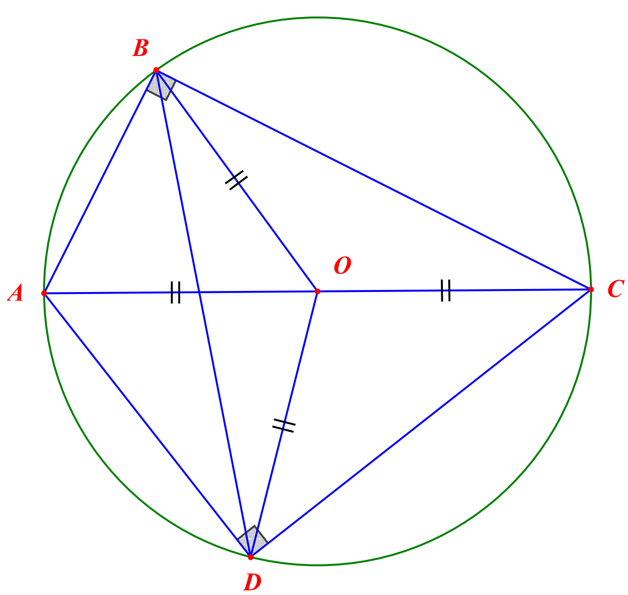
1. Gọi O là trung điểm của $AC \longrightarrow OA = OB = OC = OD = AC:2$

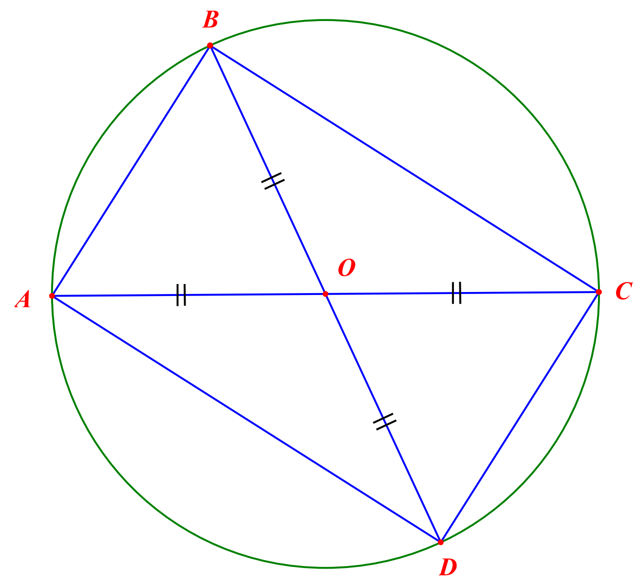
$\longrightarrow$ Bốn điểm A, C, B, D nằm trên đường tròn (O) đường kính AB.

2. AC là đường kính của đường tròn (O), BD là dây cung của đường tròn $(O) \longrightarrow AC > BD.$

+) Nếu $AC = BD \longrightarrow BD$ là đường kính của đường tròn (O)

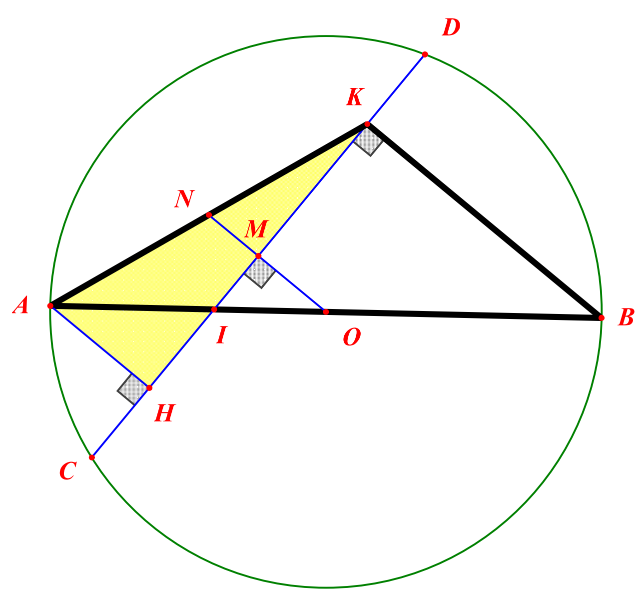
$\xrightarrow{OA=OB=OC=OD} ABCD$ là hình bình hành $\xrightarrow{AC=BD} ACBD$ là hình chữ nhật





Ví dụ 4: Cho đường tròn (O), đường kính AB. Dây CD cắt đường kính AB tại I. Gọi H và K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ A và B đến CD. CMR: $CH = DK$.

Hướng dẫn giải



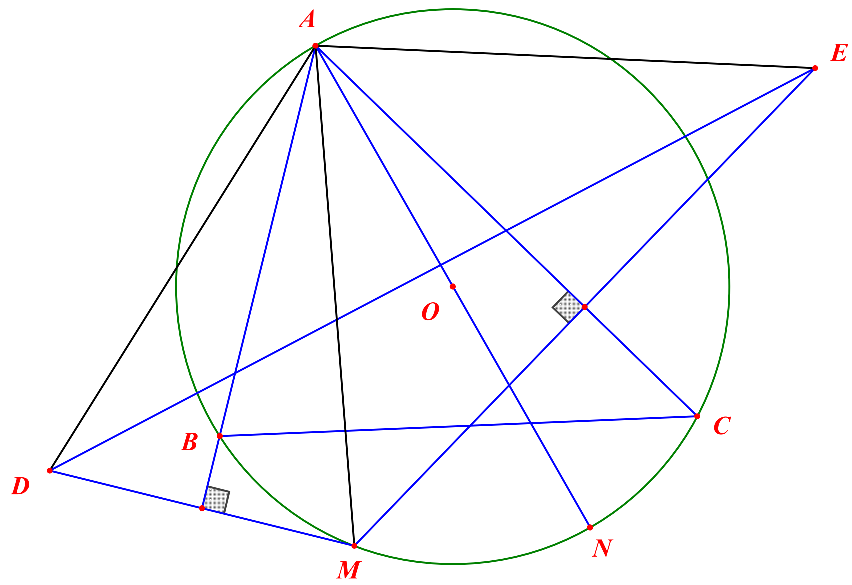
Gọi M là trung điểm của $CD \longrightarrow OM \perp CD \longrightarrow OM \,//\, AH \,//\, BK$

Gọi $N = OM \cap AK \xrightarrow{OA=OB\ ;\ ON\ //\ BK} AN = NK \xrightarrow{MN\ //\ AH} MH = MK$

$\xrightarrow{MC=MD} MC - MH = MD - MK \longrightarrow CH = DK$

Ví dụ 5: Cho ΔABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). M là một điểm bất kì thuộc cung BC không chứa A. Gọi D,E theo thứ tự là các điểm đối xứng với M qua AB, AC. Tìm vị trí điểm M để DE có độ dài lớn nhất.

Hướng dẫn giải



$\widehat{DAE}=\widehat{DAM}+\widehat{MAE}=2\widehat{MAB}+2\widehat{MAC}=2\widehat{BAC}=const$. ΔADE cân tại A.

$\longrightarrow DE_{\max}\Leftrightarrow AD_{\max}\xrightarrow{AD=AM}AM_{\max}$. Ta có: $AM\le AN\longrightarrow AM_{\max}=AN\Leftrightarrow M\equiv N$

Vậy M nằm trên cung $\overset{\frown}{BC}$ sao cho AM là đường kính của đường tròn (O)

III. Liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây

1. Kiến thức cần nhớ

Trong một đường tròn:

- Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm
- Hai dây cách đều tâm thì bằng nhau
- Dây nào lớn hơn thì dây đó gần tâm hơn
- Dây nào gần tâm hơn thì dây đó lớn hơn

2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 6: Cho đường tròn (O) đường kính AB, các dây AC, AD. Gọi E là điểm bất kì trên đường tròn, H và K theo thứ tự là hình chiếu của E trên AC, AD. Chứng minh rằng: $HK\le AB$.

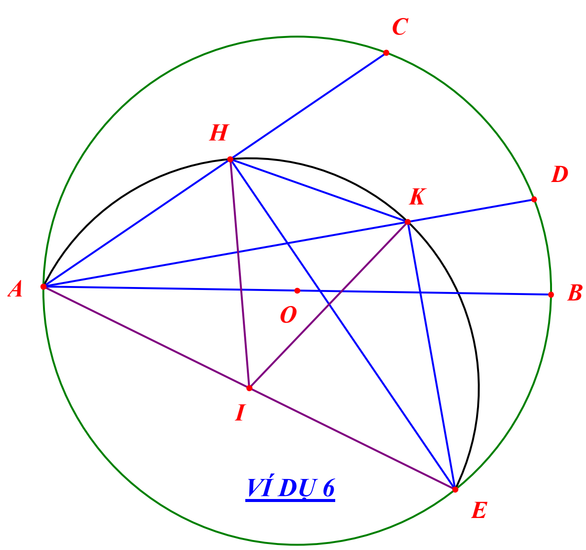
Hướng dẫn giải

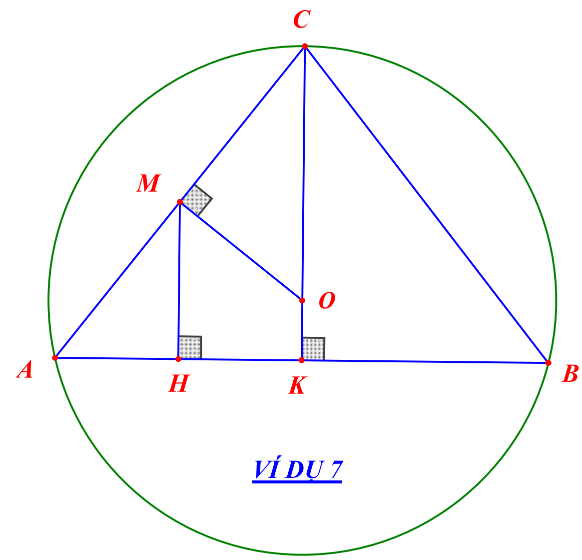
Gọi I là trung điểm của $AE\longrightarrow IA=IH=IK=IE\longrightarrow A,H,K,E$ cùng thuộc một đường tròn tâm I đường kính $AE\longrightarrow HK<AE\xrightarrow{AE<AB}HK<AB$.

Ví dụ 7: Cho đường tròn (O), dây $AB = 24cm$, dây $AC = 20cm$ ($\widehat{BAC} < 90^0$ và điểm O nằm trong góc $\widehat{BAC}$). Gọi M là trung điểm của AC. Khoảng cách từ M để AB bằng $8cm$.

1. Chứng minh rằng: ΔABC cân tại C.
2. Tính bán kính của đường tròn (O)

Hướng dẫn giải





1. Kẻ $MH \perp AB\,(H \in AB) \longrightarrow MH = 8cm \longrightarrow AH = \sqrt{MA^2 - MH^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6cm$

Kẻ $CK \perp AB \xrightarrow{MA=MC\ ;\ MH\ //\ CK} CK = 2MH = 16cm$; $AK = 2AH = 12cm = AB:2$

$\longrightarrow CK$ là đường cao đồng thời là đường trung tuyến của $\Delta ABC \longrightarrow \Delta ABC$ cân tại C.

2. $\xrightarrow{\widehat{ACK}\text{ chung ; }\widehat{AKC}=\widehat{OMC}=90^0} \Delta AKC \sim \Delta OMC\,(g-g) \longrightarrow \dfrac{AC}{OC} = \dfrac{CK}{CM} = \dfrac{16}{10} = \dfrac{8}{5}$

$\longrightarrow OC = \dfrac{5.AC}{8} = \dfrac{5.20}{8} = 12,5cm$

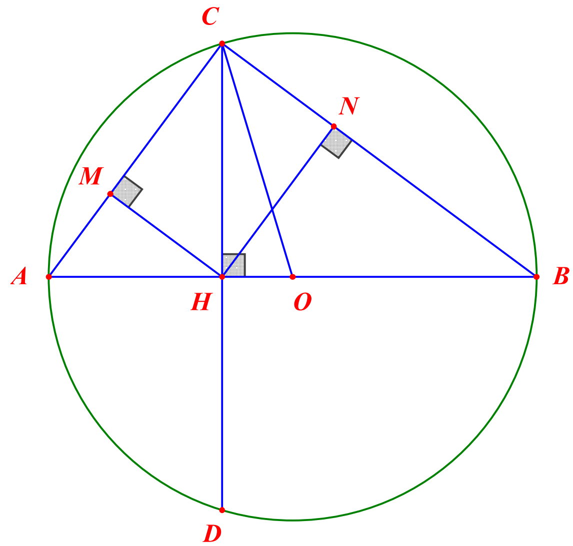
Ví dụ 8: Cho đường tròn (O), đường kính $AB = 13cm$. Dây CD có độ dài 12cm vuông góc với AB tại H.

1. Tính độ dài $HA, HB = ?$
2. Gọi M, N theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của H trên AC, BC. Tính $S_{CMHN} = ?$

Hướng dẫn giải

1. $CH = CD:2 = 12:2 = 6cm \longrightarrow OH = \sqrt{OC^2 - CH^2} = \sqrt{\left(\dfrac{13}{2}\right)^2 - 6^2} = \sqrt{\dfrac{25}{4}} = \dfrac{5}{2}cm$

$\longrightarrow AH = OA - OH = \frac{13}{2} - \frac{5}{2} = \frac{8}{2} = 4cm$; $BH = OB + OH = \frac{13}{2} + \frac{5}{2} = 9cm$



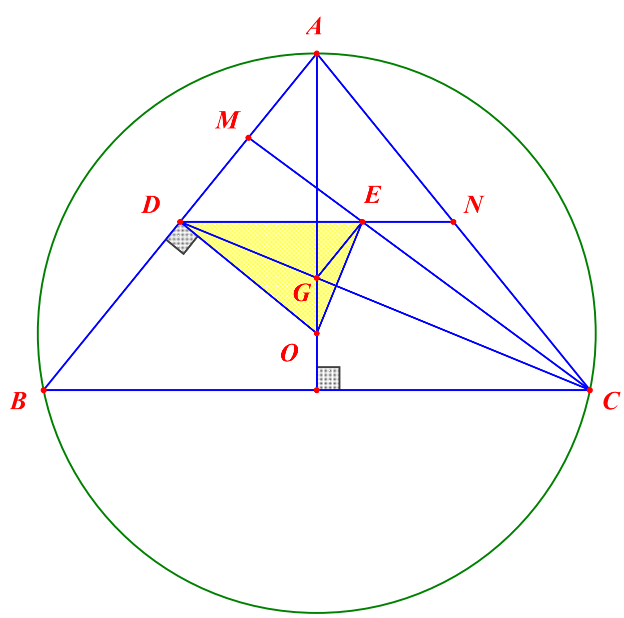
2. $\xrightarrow{\widehat{ACB}=\widehat{CMH}=90^0\ ;\ \widehat{MCH}=\widehat{ABC}} \Delta ABC \sim \Delta HCM\left(g-g\right) \longrightarrow \frac{S_{\Delta HCM}}{S_{\Delta ABC}} = \left(\frac{CH}{AB}\right)^2 = \frac{36}{169}$

Lại có: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}CH.AB = \frac{1}{2}.6.13 = 39cm^2 \longrightarrow S_{\Delta HCM} = \frac{36.S_{\Delta ABC}}{169} = \frac{36.39}{169} = \frac{108}{13}cm^2$

$\longrightarrow S_{CMHN} = 2S_{\Delta CMH} = 2.\frac{108}{13} = \frac{216}{13}cm^2$

Ví dụ 9: Cho ΔABC cân tại A nội tiếp đường tròn $\left(O\right)$. Gọi D là trung điểm của AB, E là trọng tâm của ΔACD. Chứng minh rằng: $OE \perp CD$.

Hướng dẫn giải



1. Gọi $M = CE \cap AB$; $N = DE \cap AC$; $G = CD \cap OA$.

Ta có: $\dfrac{CG}{CD} = \dfrac{CE}{CM} = \dfrac{2}{3} \xrightarrow{\text{Ta - lét đảo}} GE \,//\, AB \xrightarrow{OD \perp AB} GE \perp OD$

Ta có: $DN \,//\, BC \xrightarrow{OA \perp BC} OA \perp DN \longrightarrow OG \perp DE$

$\xrightarrow{OG \perp DE \text{ ; } EG \perp OD} G$ là trọng tâm của $\Delta ODE \longrightarrow DG \perp OE \longrightarrow OE \perp CD.$

IV. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn

1. Lý thuyết

Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn	Số điểm chung	Hệ thức giữa d và R
Đường thẳng và đường tròn cắt nhau	2	$d < R$
Đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau	1	$d = R$
Đường thẳng và đường tròn không giao nhau	0	$d > R$

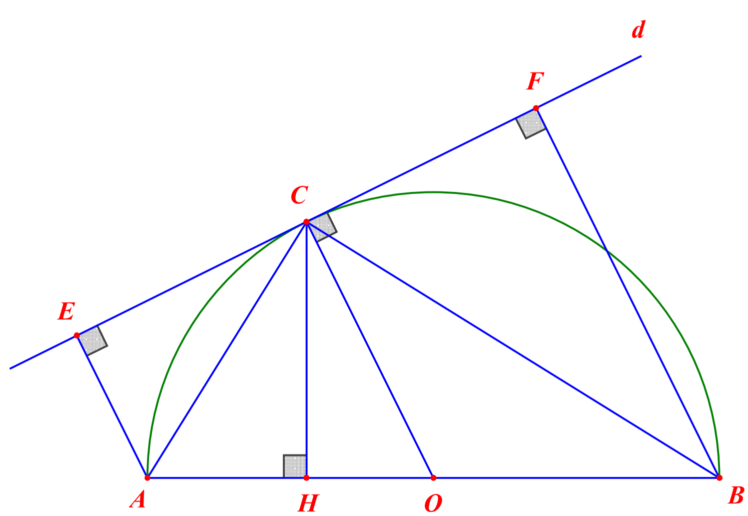
– Nếu một đường thẳng là tiếp tuyến của một đường tròn thì nó vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm

2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 10: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Qua C thuộc nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến d của nửa đường tròn. Gọi E, F lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ A, B đến d. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ C đến AB. Chứng minh rằng:

1. $CE = CF$.
2. AC là tia phân giác của góc $\widehat{BAE}$
3. $CH^2 = AE.BF$.

Hướng dẫn giải



1. $\xrightarrow{AE\ //\ BF} ABFE$ là hình thang $\xrightarrow{OA=OB\ ;\ OC\ //\ AE\ //\ BF} CE = CF$

2. ΔAOC cân tại $O \longrightarrow \widehat{OAC} = \widehat{OCA} \longrightarrow \widehat{BAC} = \widehat{OCA} \xrightarrow{\widehat{OCA}=\widehat{CAE}\ (OC\ //\ AE)} \widehat{BAC} = \widehat{CAE}$

$\longrightarrow AC$ là phân giác của góc $\widehat{BAE}$

3. $\xrightarrow{\widehat{CAH}=\widehat{CAE}\ ;\ AC\text{ chung}} \Delta AHC = \Delta AEC\left(ch - gnhon\right) \longrightarrow AE = AH$

ΔBOC cân tại $O \longrightarrow \widehat{HBC} = \widehat{OCB} \xrightarrow{\widehat{OCB}=\widehat{CBF}\ (BF\ //\ OC)} \widehat{HBC} = \widehat{CBF}$

$\xrightarrow{BC\text{ chung}} \Delta BHC = \Delta BFC\left(ch - gnhon\right) \longrightarrow BF = BH$

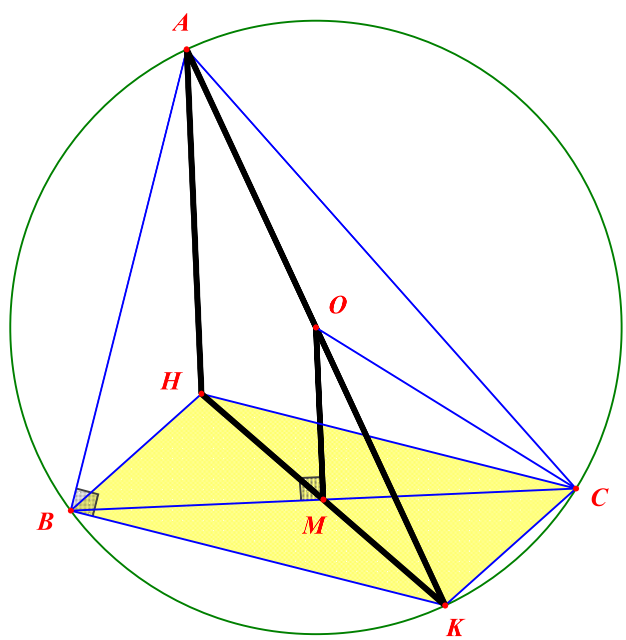
$OC = AB:2 \longrightarrow \Delta ABC$ vuông tại $C \longrightarrow CH^2 = AH.BH \xrightarrow{AH=AE\ ;\ BH=BF} CH^2 = AE.BF$

Ví dụ 11: Cho ΔABC nội tiếp đường tròn $\left(O\ ;R\right)$, H là trực tâm của ΔABC, M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng:

1. $AH = 2OM$.

2. Tính $BC = ?$ Nếu $AH = R$.

Hướng dẫn giải



1. Kẻ đường kính AK của đường tròn $\left(O\right)$

$\xrightarrow{BK\perp AB\ ;\ CH\perp AB} BK\ //\ CH$; $\xrightarrow{BH\perp AC\ ;\ CK\perp AC} BH\ //\ CK$

$\xrightarrow{BH\ //\ CK\ ;\ BK\ //\ CH} BHCK$ là hình bình hành $\longrightarrow M$ là trung điểm của HK

$\longrightarrow OM$ là đường trung bình của $\Delta AHK \longrightarrow AH = 2OM$

2. $AH = R \longrightarrow OM = \dfrac{AH}{2} = \dfrac{R}{2} \longrightarrow MC = \sqrt{OC^2 - OM^2} = \sqrt{R^2 - \dfrac{R^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}R}{2}$

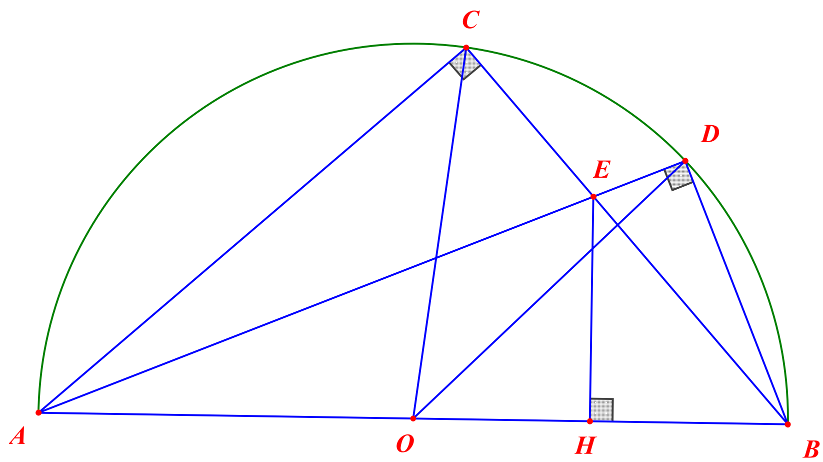
$\longrightarrow BC = 2MC = 2.\dfrac{\sqrt{3}R}{2} = \sqrt{3}R$

Ví dụ 12: Cho nửa đường tròn tâm (O) đường kính $AB = 2R$. Vẽ hai dây AD và BC cắt nhau tại điểm E nằm bên trong nửa đường tròn. Chứng minh rằng:

1. $EA.ED = EB.EC$

2. Chứng minh rằng: $AE.AD + BE.BC$ không đổi.

Hướng dẫn giải



1. $\xrightarrow{\widehat{ACE}=\widehat{BDE}=90^0\ ;\ \widehat{AEC}=\widehat{BED}} \Delta ACE \sim \Delta BDE(g-g) \longrightarrow \dfrac{EA}{EB} = \dfrac{EC}{ED} \longrightarrow EA.ED = EB.EC$

2. Kẻ $EH \perp AB\,(H \in AB)$.

$\xrightarrow{\widehat{AHE}=\widehat{ADB}=90^0\ ;\ \widehat{BAD}\text{ chung}} \Delta AHE \sim \Delta ADB(g-g) \longrightarrow \dfrac{AH}{AD} = \dfrac{AE}{AB} \longrightarrow AE.AD = AH.AB$

$\xrightarrow{\widehat{BHE}=\widehat{BCA}=90^0\ ;\ \widehat{ABC}\text{ chung}} \Delta ABC \sim \Delta EBH(g-g) \longrightarrow \dfrac{AB}{BE} = \dfrac{BC}{BH} \longrightarrow BE.BC = BH.AB$

$\longrightarrow AE.AD + BE.BC = AH.AB + BH.\mathrm{AB} = AB(AH + BH) = AB^2 = 4R^2$

Ví dụ 13: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Vẽ tiếp tuyến Ax với nửa đường tròn. Gọi C là một điểm bất kì trên nửa đường tròn, BC cắt Ax tại P. Gọi Q là trung điểm của AP. Chứng minh rằng:

1. $AC \perp OQ$.

2. Vẽ $CH \perp AB$ cắt BQ tại N. Chứng minh rằng: $NH = NC$.

Hướng dẫn giải

1. $\xrightarrow{\mathrm{OA = OB\ ;\ AQ = PQ}} OQ$ là đường trung bình của $\Delta ABP \longrightarrow OQ \,//\, BP \xrightarrow{AC \perp BP} AC \perp OQ$.

2. $\xrightarrow{CH \perp AB\ ;\ AP \perp AB} CH \,//\, AP \xrightarrow{\text{Ta - lét}} \dfrac{NH}{AQ} = \dfrac{BN}{BQ} = \dfrac{CN}{PQ} \xrightarrow{AQ = PQ} BN = CN$