BÀI TẬP ÔN THI OLYMPIC 30/4, THI HỌC SINH GIỎI TỈNH VÀ THI QUỐC GIA QUA CÁC NỘI DUNG ĐẶC SẮC

(VĂN PHÚ QUỐC- GV. TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN BỈNH KHIÊM)

(0982 333 443 ; 0934 825 925)

CHƯƠNG I: BẤT ĐẲNG THỨC

1. (Russia 1991). Cho $\sum_{i=1}^{1990}\left|x_i - x_{i+1}\right| = 1991$. Đặt $s_n = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$\left|s_1 - s_2\right| + \left|s_2 - s_3\right| + ... + \left|s_{1990} - s_{1991}\right|.$$

HD:

Đặt $M = \left|s_1 - s_2\right| + \left|s_2 - s_3\right| + ... + \left|s_{1990} - s_{1991}\right|$.

$\forall\ 1 \le i \le 1990$ ta có: $s_{i+1} - s_i = \frac{\sum_{k=1}^{i+1} x_k}{i+1} - \frac{\sum_{k=1}^{i} x_k}{i} = \frac{ix_{i+1} - \sum_{k=1}^{i} x_k}{i(i+1)} = \frac{\sum_{k=1}^{i} k\left(x_{k+1} - x_k\right)}{i(i+1)}$.

Suy ra: $\left|s_{i+1} - s_i\right| \le \frac{\sum_{k=1}^{i} k\left|x_{k+1} - x_k\right|}{i(i+1)}$.

Cho i chạy từ 1 đến 1990, ta thu được 1990 bất đẳng thức và cộng chúng lại, ta có:

$$M = \sum_{i=1}^{1990}\left|s_{i+1} - s_i\right| \le \sum_{i=1}^{1990}\frac{\sum_{k=1}^{i} k\left|x_{k+1} - x_k\right|}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{1990} i\left(\sum_{k=i}^{1990}\frac{1}{k(k+1)}\right)\left|x_{i+1} - x_i\right|$$

$$= \sum_{i=1}^{1990}\left(1 - \frac{i}{1991}\right)\left|x_{i+1} - x_i\right| \le \sum_{i=1}^{1990}\left(1 - \frac{1}{1991}\right)\left|x_{i+1} - x_i\right| = \frac{1990}{1991}\sum_{i=1}^{1990}\left|x_{i+1} - x_i\right| = 1990.$$

2. (United Kingdom 1992). Cho $x, y, z, w > 0$. Chứng minh: $\frac{12}{x+y+z+w} \le \sum_{sym}\frac{1}{x+y} \le \frac{3}{4}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{w}\right)$

HD:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có:

$$\sum_{sym}\frac{1}{x+y} \ge \frac{6^2}{\sum_{sym}(x+y)} = \frac{12}{x+y+z+w} \quad ; \quad \sum_{sym}\frac{1}{x+y} \le \sum_{sym}\left(\frac{1}{4x} + \frac{1}{4y}\right) = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{w}\right).$$

3. (Italia 1993). Cho $a, b, c \in [0;1]$. Chứng minh: $a^2 + b^2 + c^2 \le a^2b + b^2c + c^2a + 1$.

HD:

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với: $a^2(1-b) + b^2(1-c) + c^2(1-a) \le 1$.

Vì $a, b, c \in [0;1]$ nên ta có:

$$a^2(1-b) + b^2(1-c) + c^2(1-a) \le a(1-b) + b(1-c) + c(1-a) = (a-1)(b-1)(c-1) + 1 - abc \le 1.$$

4. (Poland 1994). Cho $n \in \mathbb{N}^*$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $x_1 + \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_3^3}{3} + ... + \frac{x_n^n}{n}$ biết rằng: $x_1, x_2, ..., x_n > 0$ thỏa mãn điều kiện: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n} = n$.

HD:

Với mỗi $n \ge k \ge 1$, áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta được: $x_k^k + (k-1).1 \ge kx_k \Rightarrow \frac{x_k^k}{k} \ge x_k - \frac{k-1}{k}$.

Cho k chạy từ 1 đến n ta thu được n bất đẳng thức và cộng chúng lại với nhau:

$$x_1 + \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_3^3}{3} + ... + \frac{x_n^n}{n} \ge (x_1 + x_2 + ... + x_n) - \left(\frac{1}{2} + ... + \frac{n-1}{n}\right) \qquad (1)$$

Mặt khác, theo AM-GM thì $x_1 + x_2 + ... + x_n \ge \frac{n^2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}} = n$ (2)

Từ (1) và (2) ta thu được: $x_1 + \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_3^3}{3} + ... + \frac{x_n^n}{n} \ge 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x_1 = x_2 = ... = x_n = 1$.

5. (India 1995). Cho $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$ thỏa mãn hai tính chất $|x_i - x_{i+1}| < 1$ và $x_i \ge 1$ với mọi $i = 1, 2, ..., n$ $(x_{n+1} = x_1)$. Chứng minh rằng: $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + ... + \frac{x_n}{x_1} < 2n - 1$.

HD:

Do $\frac{x_1}{x_2}.\frac{x_2}{x_3}...\frac{x_n}{x_1} = 1$ nên $\exists$ chỉ số k sao cho $\frac{x_k}{x_{k+1}} \le 1$ (1)

Từ giả thiết $\Rightarrow x_i < x_{i+1} + 1 < 2x_{i+1} \Rightarrow \frac{x_i}{x_{i+1}} < 2 \ \forall i$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra: $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + ... + \frac{x_n}{x_1} = \sum_{i \ne k} \frac{x_i}{x_{i+1}} + \frac{x_k}{x_{k+1}} < 2(n-1) + 1 = 2n - 1$.

6. (Romania 1996). Cho $x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1} > 0$ thỏa mãn: $x_1 + x_2 + ... + x_n = x_{n+1}$.

Chứng minh rằng: $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i(x_{n+1} - x_i)} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_{n+1}(x_{n+1} - x_i)}$.

HD:

Ta có: $\sum_{i=1}^{n} x_{n+1}(x_{n+1} - x_i) = nx_{n+1}^2 - x_{n+1}\sum_{i=1}^{n} x_i = (n-1)x_{n+1}^2$.

Bất đẳng thức đã cho được viết lại dưới dạng: $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{x_i}{x_{n+1}}.\frac{1 - \frac{x_i}{x_{n+1}}}{n-1}} \le 1$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta thấy: $1=\frac{1}{2}+\frac{n-1}{2(n-1)}=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{x_i}{2x_{n+1}}+\frac{1-\frac{x_i}{x_{n+1}}}{2(n-1)}\right]\ge\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{x_i}{x_{n+1}}\cdot\frac{1-\frac{x_i}{x_{n+1}}}{n-1}}$.

7. (Iran 1997). Cho $x_1,x_2,x_3,x_4>0$ thỏa mãn: $x_1x_2x_3x_4=1$. Chứng minh rằng:

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3\ge max\left\{x_1+x_2+x_3+x_4,\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}\right\}.$$

HD:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM với mỗi i ta có: $x_i^3+1+1\ge 3x_i$.

Suy ra: $x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3+8\ge(x_1+x_2+x_3+x_4)+3(x_1+x_2+x_3+x_4)$

$$\ge x_1+x_2+x_3+x_4+2.4\sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}=x_1+x_2+x_3+x_4+8$$

$\Rightarrow x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3\ge x_1+x_2+x_3+x_4$.

Lại áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3=\frac{1}{3}\left[\left(x_1^3+x_2^3+x_3^3\right)+\left(x_2^3+x_3^3+x_4^3\right)+\left(x_1^3+x_3^3+x_4^3\right)+\left(x_1^3+x_2^3+x_4^3\right)\right]$$

$$\ge\frac{1}{3}\left(3\sqrt[3]{x_1^3x_2^3x_3^3}+3\sqrt[3]{x_2^3x_3^3x_4^3}+3\sqrt[3]{x_3^3x_4^3x_1^3}+3\sqrt[3]{x_4^3x_1^3x_2^3}\right)=\frac{1}{x_4}+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x_1=x_2=x_3=x_4=1$.

8. (Vietnam 1998). Cho $n\ge 2$ và $x_1,x_2,...,x_n>0$ thỏa mãn: $\frac{1}{x_1+1998}+\frac{1}{x_2+1998}+...+\frac{1}{x_n+1998}=\frac{1}{1998}$.

Chứng minh: $\frac{\sqrt[n]{x_1x_2...x_n}}{n-1}\ge 1998$.

HD:

Với mỗi i $(1\le i\le n)$, sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$\frac{x_i}{1998(x_i+1998)}=\frac{1}{1998}-\frac{1}{x_i+1998}=\sum_{j\ne i}\frac{1}{x_j+1998}\ge\frac{n-1}{\sqrt[n-1]{\prod_{j\ne i}(x_j+1998)}}\Rightarrow x_i\ge 1998(n-1)\sqrt[n-1]{\frac{(x_i+1998)^{n-1}}{\prod_{j\ne i}(x_j+1998)}}.$$

Cho i chạy từ 1 đến n, ta sẽ thu được n bất đẳng thức và nhân chúng lại với nhau ta được đpcm.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x_1=x_2=...=x_n=1998(n-1)$.

9. (Korea 1999). Cho $a,b,c>0$ thỏa $abc\ge 1$. Chứng minh: $\frac{1}{a+b^4+c^4}+\frac{1}{a^4+b+c^4}+\frac{1}{a^4+b^4+c}\le 1$.

HD:

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM cùng với giả thiết $abc\ge 1$ ta được:

$$b^4+c^4=\frac{3b^4+c^4}{4}+\frac{b^4+3c^4}{4}\ge bc\left(b^2+c^2\right)\ge\frac{b^2+c^2}{a}\Rightarrow\frac{1}{a+b^4+c^4}\le\frac{a}{a^2+b^2+c^2}.$$

Làm tương tự cho hai số hạng còn lại ở vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh. Sau đó, cộng vế theo vế của các bất đẳng thức ta được: $\frac{1}{a+b^4+c^4}+\frac{1}{a^4+b+c^4}+\frac{1}{a^4+b^4+c}\le\frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2}$.

Mặt khác, theo bất đẳng thức Cauchy Schwarz và AM-GM thì $\frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2}\le\frac{3}{a+b+c}\le\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\le 1$.

Vậy $\frac{1}{a+b^4+c^4}+\frac{1}{a^4+b+c^4}+\frac{1}{a^4+b^4+c}\le 1$.

10. (Singapore 2000). Cho $a,b,c,d>0$ thỏa mãn $c^2+d^2=\left(a^2+b^2\right)^3$. Chứng minh $\frac{a^3}{c}+\frac{b^3}{d}\ge 1$.

HD:

Áp dụng với bất đẳng thức Cauchy Schwarz và kết hợp với giả thiết bài toán ta có:

$$\left(\frac{a^3}{c}+\frac{b^3}{d}\right)(ac+bd)=\left[\left(\sqrt{\frac{a^3}{c}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{b^3}{d}}\right)^2\right]\left[\left(\sqrt{ac}\right)^2+\left(\sqrt{bd}\right)^2\right]$$

$$\ge\left(\sqrt{\frac{a^3}{c}}.\sqrt{ac}+\sqrt{\frac{b^3}{d}}.\sqrt{bd}\right)^2=\left(a^2+b^2\right)=\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)}\ge ac+bd.$$

Suy ra điều phải chứng minh.

11. (Belarus 2001). Cho $x_1,x_2,x_3\in[-1;1]$ và $y_1,y_2,y_3\in[0;1)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$\frac{1-x_1}{1-x_2y_3}.\frac{1-x_2}{1-x_3y_1}.\frac{1-x_3}{1-x_1y_2}.$$

HD:

Vì $1-x_1y_2=(1-x_1)y_2+(1-y_2)>0$; $1+x_1\ge 0$ và $1-y_2>0$ nên ta có:

$$\frac{1-x_1}{1-x_1y_2}-\frac{2}{1+y_2}=-\frac{(1+x_1)(1-y_2)}{(1+y_2)(1-x_1y_2)}\le 0\Rightarrow 0\le\frac{1-x_1}{1-x_1y_2}\le\frac{2}{1+y_2}\le 2.$$

Tương tự ta cũng chứng minh được $0\le\frac{1-x_2}{1-x_3y_1}\le 2;\quad 0\le\frac{1-x_3}{1-x_1y_2}\le 2$.

Suy ra: $\frac{1-x_1}{1-x_2y_3}.\frac{1-x_2}{1-x_3y_1}.\frac{1-x_3}{1-x_1y_2}=\frac{1-x_1}{1-x_1y_2}.\frac{1-x_2}{1-x_2y_3}.\frac{1-x_3}{1-x_3y_1}\le 8$.

Dễ thấy dấu "=" có thể xảy ra chẳng hạn lấy $x_1=x_2=x_3=-1$, $y_1=y_2=y_3=0$.

Vậy 8 là giá trị lớn nhất của bài toán.

12. (China 2002). Cho $\left(P_1,P_2,...,P_n\right)$ $\quad(n\ge 2)$ là một hoán vị bất kì của $(1,2,...,n)$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{P_1+P_2}+\frac{1}{P_2+P_3}+...+\frac{1}{P_{n-1}+P_n}>\frac{n-1}{n+2}$.

HD:

Đặt $A=\frac{1}{P_1+P_2}+\frac{1}{P_2+P_3}+...+\frac{1}{P_{n-1}+P_n}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz ta có:

$$A\ge\frac{(n-1)^2}{\left(P_1+P_2\right)+\left(P_2+P_3\right)+...+\left(P_{n-1}+P_n\right)}$$

$$=\frac{(n-1)^2}{2\left(P_1+P_2+...+P_n\right)-P_1-P_2}=\frac{(n-1)^2}{2(1+2+...+n)-P_1-P_n}$$

$$=\frac{(n-1)^2}{n(n+1)-P_1-P_n}\ge\frac{(n-1)^2}{n(n+1)-1-2}=\frac{(n-1)^2}{(n-1)(n+2)-1}>\frac{(n-1)^2}{(n-1)(n+2)}=\frac{n-1}{n+2}.$$

13. (USA 2003). Cho $a,b,c\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Chứng minh rằng: $\sum\frac{\sin a.\sin(a-b).\sin(a-c)}{\sin(b+c)}\ge 0$.

HD:

Đặt $x=\sin a, y=\sin b, z=\sin c$. Khi đó $x,y,z>0$.

Dễ thấy $\sin a.\sin(a-b).\sin(a-c).\sin(a+b).\sin(a+c)=x\left(x^2-y^2\right)\left(x^2-z^2\right)$.

Cần chứng minh: $\sum x\left(x^2-y^2\right)\left(x^2-z^2\right)\ge 0$?

Đặt $x=\sqrt{u},\ y=\sqrt{v},\ z=\sqrt{w}$. Bất đẳng thức thành: $\sum\sqrt{u}(u-v)(u-w)\ge 0$ đúng theo bất đẳng thức Schur.

14. (Japan 2004). Cho $\begin{cases}a,b,c>0\\a+b+c=1\end{cases}$. Chứng minh rằng: $\frac{1+a}{1-a}+\frac{1+b}{1-b}+\frac{1+c}{1-c}\le 2\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)$.

HD:

Ta có: $\frac{1+a}{1-a}=\frac{(a+b+c)+a}{(a+b+c)-a}=\frac{2a}{b+c}+1$.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với: $\sum\left(\frac{2b}{a}-\frac{2b}{c+a}\right)\ge 3\Leftrightarrow\sum\frac{bc}{a(c+a)}\ge\frac{3}{2}$.

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz ta có: $\sum\frac{bc}{a(c+a)}=\sum\frac{b^2c^2}{abc(c+a)}\ge\frac{(ab+bc+ca)^2}{2abc(a+b+c)}=\frac{3}{2}$.

15. (Taiwan 2005). Cho $a_1,a_2,...,a_{95}>0$. Chứng minh: $\sum_{k=1}^{95}a_k\le 94+\prod_{k=1}^{95}max\{1,a_k\}$.

HD:

Đặt $b=max\{a_k,1\}$ thì ta có: $\prod_{k=1}^{95}max\{1,a_k\}=\prod_{k=1}^{95}b_k$ và $\prod_{k=1}^{95}a_k\le\prod_{k=1}^{95}b_k$.

Cần chứng minh: $\sum_{k=1}^{95}b_k\le 94+\prod_{k=1}^{95}b_k$?

Thật vậy, $\sum_{k=1}^{95}b_k\le 94+\prod_{k=1}^{95}b_k\Leftrightarrow(1-b_1)(1-b_2)+(1-b_1b_2)(1-b_3)+...+(1-b_1b_2...b_{94})(1-b_{95})\ge 0$, hiển nhiên đúng vì $b_k\ge 1\ \forall k=1,2,...,95$.

16. (Bulgaria 2006). Cho $b^3+b\le a-a^3$. Tìm giá trị lớn nhất của $a+b$.

HD:

Đặt $a+b=c$. Từ giả thiết, ta có: $(c-a)^3+(c-a)\le a-a^3\Leftrightarrow 3ca^2-\left(3c^2+2\right)a+c^3+c\le 0$.

Nếu $c>0$ thì để đẳng thức này đúng, ta cần có $\Delta\ge 0\Leftrightarrow 4-3c^4\ge 0\Leftrightarrow c\le\sqrt[4]{\frac{4}{3}}$.

Dấu "=" xảy ra khi a là nghiệm kép của phương trình bậc hai tương ứng (cụ thể $a=\frac{3c^2+2}{6c}$). Do đó giá trị lớn nhất của tổng $a+b$ là: $\sqrt[4]{\frac{4}{3}}$.

17. (Austria 2007). Cho $0 < x_0, x_1, ..., x_{669} < 1$ là các số thực khác nhau từng đôi một. Chứng minh rằng tồn tại cặp số $\left(x_i, x_j\right)$ sao cho: $0 < x_i x_j \left(x_i - x_j\right) < \dfrac{1}{2007}$.

HD: Không mất tính tổng quát, giả sử $0 < x_0 < x_1 < ... < x_{669} < 1$. Đặt $S = \sum\limits_{i=0}^{668} x_{i+1} x_i \left(x_{i+1} - x_i\right)$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$S = \sum_{i=0}^{668} x_{i+1} x_i \left(x_{i+1} - x_i\right) < \sum_{i=0}^{668} \left(\frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right)^2 \left(x_{i+1} - x_i\right) = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{668} \left(x_{i+1}^3 - x_i^3 + x_{i+1}^2 x_i - x_{i+1} x_i^2\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left[\sum_{i=0}^{668}\left(x_{i+1}^3 - x_i^3\right) + \sum_{i=0}^{668}\left(x_{i+1}^2 x_i - x_{i+1} x_i^2\right)\right] = \frac{1}{4}\left(x_{669}^3 - x_0^3 + S\right) < \frac{1}{4}(1 + S)$$

Suy ra: $S < \dfrac{1}{3}$. Gọi $x_{k+1} x_k \left(x_{k+1} - x_k\right)$ là số hạng nhỏ nhất trong 669 số hạng của S thì theo đánh giá trên, ta có: $\dfrac{1}{3} > S \geq 669 x_{k+1}\left(x_{k+1} - x_k\right) \Rightarrow 0 < x_{k+1}\left(x_{k+1} - x_k\right) < \dfrac{1}{3.669} = \dfrac{1}{2007}$ (đpcm).

18. (Indonesia 2008). Cho số tự nhiên $n \geq 3$ và các số thực $x_1, x_2, ..., x_n > 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x_1 x_2}{x_3 - 1} + ... + \frac{x_{n-1} x_n}{x_1 - 1} + \frac{x_n x_1}{x_2 - 1} \geq 4n.$$

HD:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta được:

$$\frac{x_1 x_2}{x_3 - 1} + ... + \frac{x_{n-1} x_n}{x_1 - 1} + \frac{x_n x_1}{x_2 - 1} \geq \frac{x_1 x_2}{\frac{x_3^2 + 4}{4} - 1} + ... + \frac{x_{n-1} x_n}{\frac{x_1^2 + 4}{4} - 1} + \frac{x_n x_1}{\frac{x_2^2 + 4}{4} - 1}$$

$$= 4\left(\frac{x_1 x_2}{x_3^2} + ... + \frac{x_{n-1} x_n}{x_1^2} + \frac{x_n x_1}{x_2^2}\right) \geq 4n \sqrt[n]{\frac{x_1 x_2}{x_3^2} ... \frac{x_{n-1} x_n}{x_1^2} . \frac{x_n x_1}{x_2^2}} = 4n.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x_1 = x_2 = ... = x_n = 2$.

19. (Moldova 2009). Cho $x, y, z \in \left[\dfrac{1}{2}; 2\right]$ và a, b, c là một hoán vị tùy ý của chúng. Chứng minh rằng:

$$\frac{60a^2 - 1}{4xy + 5z} + \frac{60b^2 - 1}{4yz + 5x} + \frac{60c^2 - 1}{4zx + 5y} \geq 12.$$

HD:

Do $x, y \in \left[\dfrac{1}{2}; 2\right]$ nên $(x - 2)(2y - 1) + (y - 2)(2x - 1) \leq 0 \Rightarrow 4xy \leq 5(x + y) - 4$.

Do $60a^2 - 1 > 0$ nên $\dfrac{60a^2 - 1}{4xy + 5z} \geq \dfrac{60a^2 - 1}{5(x + y + z) - 4}$.

Thiết lập hai bất đẳng thức tương tự như thế và rồi cộng vế theo vế ba bất đẳng thức này ta được:

$$\frac{60a^2 - 1}{4xy + 5z} + \frac{60b^2 - 1}{4yz + 5x} + \frac{60c^2 - 1}{4zx + 5y} \geq \frac{60\left(a^2 + b^2 + c^2\right) - 3}{5(x + y + z) - 4}.$$

Ta chỉ cần chứng minh: $20\left(a^2 + b^2 + c^2\right) - 1 \geq 20(x + y + z) - 16$?

Do $a^2 + b^2 + c^2 = x^2 + y^2 + z^2$ nên bất đẳng thức này tương đương với:

$20\left(x^2 + y^2 + z^2\right) - 20(x + y + z) + 15 \geq 0 \Leftrightarrow 5(2x - 1)^2 + 5(2y - 1)^2 + 5(2z - 1)^2 \geq 0$, luôn đúng.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{2}$.

20. Cho $x_1, x_2, ..., x_{2012} \in (0;1)$. Chứng minh rằng: $\sqrt[2011]{x_1x_2...x_{2012}} + \sqrt[2011]{(1-x_1)(1-x_2)...(1-x_{2012})} < 1$.

HD:

Để ý rằng: $\sqrt[2011]{x} < \sqrt[2012]{x}$ với $x \in (0;1)$.

Như vậy: $\sqrt[2011]{x_1x_2...x_{2012}} < \sqrt[2012]{x_1x_2...x_{2012}}$; $\sqrt[2011]{(1-x_1)(1-x_2)...(1-x_{2012})} < \sqrt[2012]{(1-x_1)(1-x_2)...(1-x_{2012})}$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có: $\sqrt[2011]{x_1x_2...x_{2012}} < \sqrt[2012]{x_1x_2...x_{2012}} \le \frac{x_1 + x_2 + ... + x_{2012}}{2012}$

và $\sqrt[2011]{(1-x_1)(1-x_2)...(1-x_{2012})} < \sqrt[2012]{(1-x_1)(1-x_2)...(1-x_{2012})} \le \frac{(1-x_1)+(1-x_2)+...+(1-x_{2012})}{2012}$.

Suy ra: $\sqrt[2011]{x_1x_2...x_{2012}} + \sqrt[2011]{(1-x_1)(1-x_2)...(1-x_{2012})} < 1$.

21. Giả sử phương trình $x^4 + mx^3 + 2x^2 + nx + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thực. Chứng minh $m^2 + n^2 \ge 8$.

HD:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy- Schwarz ta có: $m^2 + n^2 \ge \frac{\left(x^4 + 2x^2 + 1\right)^2}{x^2 + x^6} \ge 8 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \left(x^2 - 1\right)^4 \ge 0$ luôn đúng.

22. Cho $x, y > 0$ thỏa mãn: $x^3 + y^3 = x - y$. Chứng minh rằng: $x^2 + 4y^2 < 1$.

HD:

Ta có: $\left(x^3 + y^3\right)\left(1 - x^2 - 4y^2\right) = \left(x^3 + y^3\right) - \left(x^3 + y^3\right)\left(x^2 + 4y^2\right) = x^3 + y^3 - (x - y)\left(x^2 + 4y^2\right)$

$= y\left(x^2 - 4xy + 5y^2\right) = y\left[(x - 2y)^2 + y^2\right] > 0$.

23. Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2013$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{2a + b + c} + \frac{1}{a + 2b + c} + \frac{1}{a + b + 2c}$$

HD:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM , ta có: $4xy \le (x + y)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{x + y} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$.

Dấu "=" xảy ra khi $x = y$.

Ta có: $\frac{1}{2a + b + c} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a + b} + \frac{1}{a + c}\right) \le \frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right)\right] = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c}\right)$

Tương tự: $\frac{1}{a + 2b + c} \le \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{2c}\right)$, $\frac{1}{a + b + 2c} \le \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{c}\right)$

Cộng vế theo vế của ba bất đẳng thức trên ta được:

$$P \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{2013}{4}.$$

24. Cho a,b,c là các số dương thỏa mãn $ab+a+b=3$. Chứng minh rằng: $\frac{3a}{b+1}+\frac{3b}{a+1}+\frac{ab}{a+b}\le a^2+b^2+\frac{3}{2}$

HD:

Từ giả thiết $a,b>0$ và $ab+a+b=3$ ta suy ra ba điều sau đây:

(i) $3=ab+a+b\le\frac{(a+b)^2}{4}+a+b\Rightarrow(a+b)^2+4(a+b)-12\ge0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a+b\ge2\\a+b\le-6\end{array}\right.$.

$a+b\le-6$ không xảy ra. Vì thế $a+b\ge2$ (1)

(ii) $ab+a+b=3\Rightarrow\frac{ab}{a+b}+1=\frac{3}{a+b}\Rightarrow\frac{ab}{a+b}=-1+\frac{3}{a+b}$ (2)

(iii) $ab+a+b=3\Rightarrow a(b+1)+b+1=4\Rightarrow(a+1)(b+1)=4$ (3)

Sử dụng $(2),(3)$ để biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh ta được:

$$a^2+b^2+\frac{3}{2}\ge\frac{3a}{b+1}+\frac{3b}{a+1}+\frac{ab}{a+b}=3a\frac{a+1}{4}+3b\frac{b+1}{4}+\frac{3}{a+b}-1$$

$$=\frac{3}{4}\left(a^2+b^2\right)+\frac{3}{4}(a+b)+\frac{3}{a+b}-1$$

Hay $4\left(a^2+b^2\right)+6\ge3\left(a^2+b^2\right)+3(a+b)+\frac{12}{a+b}-4$

$\Leftrightarrow a^2+b^2\ge3(a+b)+\frac{12}{a+b}-10$ (4).

Để ý rằng $a^2+b^2\ge\frac{(a+b)^2}{2}$ nên (4) sẽ được chứng minh nếu bất đẳng thức sau là đúng:

$\frac{(a+b)^2}{2}\ge3(a+b)+\frac{12}{a+b}-10$ (5).

Đặt $a+b=s$. Từ giả thiết và (1) ta suy ra: $ab\le1$. Khi đó bất đẳng thức (5) trở thành:

$s^2-6s-\frac{24}{s}+20\ge0\Leftrightarrow(s-2)\left(s^2-4s+12\right)\ge0\ \ \forall s\ge2$ (luôn đúng).

Dấu "=" xảy ra khi $s=2\Leftrightarrow a=b=1$.

25. Cho số nguyên n $(n\ge2)$ và hai số thực không âm x,y.Chứng minh $\sqrt[n]{x^n+y^n}\ge\sqrt[n+1]{x^{n+1}+y^{n+1}}$. Dấu "=" xảy ra khi nào?

HD:

+ Nếu $x=0$ hoặc $y=0$ thì bất đẳng thức luôn đúng.

+ Xét trường hợp $x>0,y>0$.

Vai trò của x,y như nhau trong bất đẳng thức cần chứng minh nên không giảm tính tổng quát có thể giả sử $x\ge y$.

Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\sqrt[n]{x^n\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^n\right)}\ge\sqrt[n+1]{x^{n+1}\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^{n+1}\right)}\Leftrightarrow\sqrt[n]{1+\left(\frac{y}{x}\right)^n}\ge\sqrt[n+1]{1+\left(\frac{y}{x}\right)^{n+1}}$$

$$\Leftrightarrow\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^{n}\right)^{n+1}\geq\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^{n+1}\right)^{n}.$$

Ta có: $0<\frac{y}{x}\leq 1\Rightarrow 0<\left(\frac{y}{x}\right)^{n}\geq\left(\frac{y}{x}\right)^{n+1}$.

Suy ra: $\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^{n}\right)^{n+1}=\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^{n}\right]\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^{n}\right]^{n}>\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^{n}\right]^{n}\geq\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^{n+1}\right]^{n}$.

Trong trường hợp $x,y>0$, bất đẳng thức không có dấu "=" xảy ra. Vậy dấu "=" chỉ xảy ra khi $x=0$ hoặc $y=0$.

26. Cho x,y,z là các số dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\sqrt[3]{4\left(x^{3}+y^{3}\right)}+\sqrt[3]{4\left(y^{3}+z^{3}\right)}+\sqrt[3]{4\left(z^{3}+x^{3}\right)}+2\left(\frac{x}{y^{2}}+\frac{y}{z^{2}}+\frac{z}{x^{2}}\right).$$

HD:

Với $x,y,z>0$ ta luôn có:

a) $4\left(x^{3}+y^{3}\right)\geq\left(x+y\right)^{3}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y$.

b) $4\left(y^{3}+z^{3}\right)\geq\left(y+z\right)^{3}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $y=z$.

c) $4\left(z^{3}+x^{3}\right)\geq\left(z+x\right)^{3}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $z=x$.

Ta chứng minh a). Việc chứng minh b) và c) là hoàn toàn tương tự như việc chứng minh a).

Ta có: $a)\Leftrightarrow 4\left(x+y\right)\left(x^{2}-xy+y^{2}\right)\geq\left(x+y\right)^{3}\Leftrightarrow 4\left(x^{2}-xy+y^{2}\right)\geq\left(x+y\right)^{2}$

$$\Leftrightarrow 3\left(x^{2}+y^{2}-2xy\right)\geq 0\Leftrightarrow 3\left(x-y\right)^{2}\geq 0.$$

Bất đẳng thức a) có dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi x = y.

Khi đó: $\sqrt[3]{4\left(x^{3}+y^{3}\right)}+\sqrt[3]{4\left(y^{3}+z^{3}\right)}+\sqrt[3]{4\left(z^{3}+x^{3}\right)}\geq 2\left(x+y+z\right)\geq 6\sqrt[3]{xyz}$.

Lại có: $2\left(\frac{x}{y^{2}}+\frac{y}{z^{2}}+\frac{z}{x^{2}}\right)\geq\frac{6}{\sqrt[3]{xyz}}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

Suy ra: $P\geq 6\left(\sqrt[3]{xyz}+\frac{1}{\sqrt[3]{xyz}}\right)\geq 12.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}xyz=1\\x=y=z\end{cases}\Leftrightarrow x=y=z=1.$

27. Cho a, b, c là các số thực thoả mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\sqrt{4^{a}+9^{b}+16^{c}}+\sqrt{9^{a}+16^{b}+4^{c}}+\sqrt{16^{a}+4^{b}+9^{c}}$.

HD:

Đặt $\vec{u}=\left(2^{a};3^{b};4^{c}\right),\vec{v}=\left(2^{c};3^{a};4^{b}\right),\vec{w}=\left(2^{b};3^{c};4^{a}\right)\Rightarrow M=\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|+\left|\vec{w}\right|$

$$M\geq\left|\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}\right|=\sqrt{\left(2^{a}+2^{b}+2^{c}\right)^{2}+\left(3^{a}+3^{b}+3^{c}\right)^{2}+\left(4^{a}+4^{b}+4^{c}\right)^{2}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có: $2^{2}+2^{b}+2^{c}\geq 3\sqrt[3]{2^{a+b+c}}=6$

$$3^{a}+3^{b}+3^{c}\geq 3\sqrt[3]{3^{a+b+c}}=9;\ 4^{a}+4^{b}+4^{c}\geq 4\sqrt[3]{4^{a+b+c}}=16.$$

Vậy $M \ge 3\sqrt{29}$. Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1$.

28. Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh rằng: $\dfrac{xyz\left(x+y+z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(xy+yz+zx\right)} \le \dfrac{3+\sqrt{3}}{9}$

HD:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$\left(1.x+1.y+1.z\right)^2 \le 3\left(x^2+y^2+z^2\right) \Rightarrow x+y+z \le \sqrt{3}.\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Ta lại có: $x^2+y^2+z^2 \ge 3\sqrt[3]{\left(xyz\right)^2}$ và $xy+yz+zx \ge 3\sqrt[3]{\left(xyz\right)^2}$.

Do đó $\dfrac{xyz\left(x+y+z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(xy+yz+zx\right)} \le \dfrac{xyz\left(1+\sqrt{3}\right)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\left(x^2+y^2+z^2\right).3\sqrt[3]{\left(xyz\right)^2}} =$

$= \dfrac{1+\sqrt{3}}{3}.\dfrac{\sqrt[3]{xyz}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \le \dfrac{1+\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \dfrac{3+\sqrt{3}}{9}$.

29. Cho $a, b, c > 0$ thỏa $ab+bc+ca = 1$. Chứng minh rằng: $\dfrac{a}{1+a^2}+\dfrac{b}{1+b^2}+\dfrac{3c}{\sqrt{1+c^2}} \le \sqrt{10}$.

HD:

Đặt $a = \tan\alpha,\ b = \tan\beta,\ c = \tan\gamma$ với $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0; \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Theo giả thiết $ab+bc+ca = 1 \Leftrightarrow \tan\alpha\tan\beta + \tan\beta\tan\gamma + \tan\gamma\tan\alpha = 1$

$\Leftrightarrow \left(\tan\alpha + \tan\gamma\right).\tan\beta = 1 - \tan\gamma\tan\alpha \Leftrightarrow \dfrac{1}{\tan\beta} = \dfrac{\tan\alpha+\tan\gamma}{1-\tan\alpha\tan\gamma}$

$\Leftrightarrow \cot\beta = \tan\left(\alpha+\gamma\right) \Leftrightarrow \cos\left(\alpha+\beta+\gamma\right) = 0 \quad (1)$

Vì $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0; \dfrac{\pi}{4}\right)$ nên $\alpha+\beta+\gamma \in \left(0; \dfrac{3\pi}{4}\right)$. Do đó $(1) \Leftrightarrow \alpha+\beta+\gamma = \dfrac{\pi}{2}$.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với: $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + 6\sin\gamma \le 2\sqrt{10} \quad (2)$

$VT(2) = 2\sin\left(\alpha+\beta\right).\cos\left(\alpha-\beta\right) + 6\sin\gamma = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\gamma\right).\cos\left(\alpha-\beta\right) + 6\sin\gamma$

$= 2\cos\gamma.\cos\left(\alpha-\beta\right) + 6\sin\gamma \le \sqrt{\left[4\cos^2\left(\alpha-\beta\right)+6^2\right]\left(\cos^2\gamma+\sin^2\gamma\right)} \le \sqrt{4+36} = 2\sqrt{10}$.

30. Cho $x, y > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = \dfrac{x^2\left(x+7y\right)+y^2\left(y+7x\right)}{\sqrt{x^4y^2+x^2y^4}}$.

HD:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$x^2\left(x+7y\right)+y^2\left(y+7x\right) = x^3+y^3+7xy\left(x+y\right) = \left(x+y\right)^3+4xy\left(x+y\right) \ge 4\sqrt{xy}\left(x+y\right)^2$

$\sqrt{x^4y^2+x^2y^4} = \sqrt{\dfrac{xy}{2}}\sqrt{2xy\left(x^2+y^2\right)} \le \sqrt{\dfrac{xy}{2}}.\dfrac{x^2+y^2+2xy}{2} = \dfrac{\sqrt{xy}\left(x+y\right)^2}{2\sqrt{2}}$

Suy ra: $A \ge 8\sqrt{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

Vậy $\min A = 8\sqrt{2}$.

31. Cho a,b,c là các số dương thỏa mãn $a+b+c=\frac{1}{2}$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\sqrt{\frac{(a+b)(b+c)}{(a+b)(b+c)+a+c}}+\sqrt{\frac{(b+c)(a+c)}{(b+c)(a+c)+a+b}}+\sqrt{\frac{(a+c)(a+b)}{(a+c)(a+b)+b+c}}$$

HD:

Đặt $x=a+b,\ y=b+c,\ z=a+c$. Suy ra: $x+y+z=2(a+b+c)=1$.

Khi đó: $P=\sqrt{\frac{xy}{xy+z}}+\sqrt{\frac{yz}{yz+x}}+\sqrt{\frac{zx}{zx+y}}$.

Ta có: $\frac{xy}{xy+z}=\frac{xy}{xy+z(x+y+z)}=\frac{xy}{(x+z)(y+z)}\Rightarrow\sqrt{\frac{xy}{xy+z}}=\sqrt{\frac{x}{x+z}.\frac{y}{y+z}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+z}+\frac{y}{y+z}\right)$.

Chứng minh tương tự ta được: $\sqrt{\frac{yz}{yz+x}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{y}{y+x}+\frac{z}{z+x}\right)$; $\sqrt{\frac{zx}{zx+y}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z+y}+\frac{x}{x+y}\right)$.

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta được: $P\le\frac{3}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{6}$.

Vậy $\max P=\frac{3}{2}$ khi $a=b=c=\frac{1}{6}$.

32. Cho α,β là các góc nhọn. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{\left(1-\sqrt{\tan\alpha\tan\beta}\right)}{\cot\alpha+\cot\beta}$.

HD:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$P\le\frac{\left(1-\sqrt{\tan\alpha\tan\beta}\right)}{2\sqrt{\cot\alpha\cot\beta}}=\frac{1}{4}.2\sqrt{\tan\alpha\tan\beta}.\left(1-\sqrt{\tan\alpha\tan\beta}\right).\left(1-\sqrt{\tan\alpha\tan\beta}\right)\le\frac{2}{27}.$$

33. Cho $x,y,z>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A=\frac{x^2+y^2+2z^2}{xy+yz}$.

HD:

Ta có: $A-\sqrt{\frac{8}{3}}=\frac{\left(x-\sqrt{\frac{2}{3}}y\right)^2+2\left(z-\sqrt{\frac{1}{6}}y\right)^2}{xy+yz}\ge 0$. Dễ dàng suy ra $MinA=\sqrt{\frac{8}{3}}$ khi $x=\sqrt{\frac{2}{3}}y$ và $z=\sqrt{\frac{1}{6}}y$.

34. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số: $f(x)=x\left(2012+\sqrt{2014-x^2}\right)$ trên miền xác định của nó.

HD:

Điều kiện: $-\sqrt{2014}\le x\le\sqrt{2014}$.

Áp dụng lần lượt có bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và AM-GM ta có:

$$\left|f(x)\right|=|x|\left(\sqrt{2012}.\sqrt{2012}+1.\sqrt{2014-x^2}\right)\le|x|\sqrt{2013}\sqrt{2012+2014-x^2}\le\sqrt{2013}.\frac{x^2+4026-x^2}{2}=2013\sqrt{2013}$$

Suy ra: $-2013\sqrt{2013}\le f(x)\le 2013\sqrt{2013}$.

Dễ dàng kiểm tra được: $f\left(\sqrt{2013}\right)=2013\sqrt{2013};\ f\left(-\sqrt{2013}\right)=-2013\sqrt{2013}$.

35. Cho $a,b,c\in(1;2)$. Chứng minh: $\dfrac{b\sqrt{a}}{4b\sqrt{c}-c\sqrt{a}}+\dfrac{c\sqrt{b}}{4c\sqrt{a}-a\sqrt{b}}+\dfrac{a\sqrt{c}}{4a\sqrt{b}-b\sqrt{c}}\ge 1$.

HD: Chứng minh: $\dfrac{b\sqrt{a}}{4b\sqrt{c}-c\sqrt{a}}\ge\dfrac{a}{a+b+c}\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow (a+b)(b+c)\ge 4b\sqrt{ac}$ luôn đúng.

Dễ dàng suy ta được điều phải chứng minh.

36. Cho $x,y,z>0$ thỏa mãn: $x^{\sqrt{2}}+y^{\sqrt{2}}+z^{\sqrt{2}}\le 1$. Tìm giá trị lớn nhất của $S=x+y+z$.

HD:

Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli ta có: $x^{\sqrt{2}}+\left(\sqrt{2}-1\right)\ge\sqrt{2}x$; $y^{\sqrt{2}}+\left(\sqrt{2}-1\right)\ge\sqrt{2}y$; $z^{\sqrt{2}}+\left(\sqrt{2}-1\right)\ge\sqrt{2}z$.

Cộng vế theo vế ba bất đẳng thức này và sử dụng giả thiết $x^{\sqrt{2}}+y^{\sqrt{2}}+z^{\sqrt{2}}\le 1$ ta suy ra $MinS=3-\sqrt{2}$.

37. Cho $a,b,c,d>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S=\left(\frac{a}{b+c+d}\right)^{\sqrt{3}}+\left(\frac{b}{c+d+a}\right)^{\sqrt{3}}+\left(\frac{c}{d+a+b}\right)^{\sqrt{3}}+\left(\frac{d}{a+b+c}\right)^{\sqrt{3}}.$$

HD:

Chứng minh bổ đề: $\dfrac{a}{b+c+d}+\dfrac{b}{c+d+a}+\dfrac{c}{d+a+b}+\dfrac{d}{a+b+c}\ge\dfrac{4}{3}$?

Giải tương tư như bài **36** và sử dụng bổ đề trên.

38. Cho $f(x)$ là hàm lồi trên $[0;a]$. Giả sử $x_1,x_2,...,x_n\in[0;a]$ sao cho $x_1+x_2+...+x_n\in[0;a]$. Chứng minh rằng: $f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)\le f(x_1+x_2+...+x_n)+(n-1)f(0)$.

HD:

Đặt $S=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$. Sử dụng bất đẳng thức Jensen ta có:

với mọi $i=\overline{1,n}$ ta có: $f(x_i)=f\left(\dfrac{x_i}{S}.S+\dfrac{S-x_i}{S}.0\right)\le\dfrac{x_i}{S}.f(S)+\dfrac{S-x_i}{S}.f(0)$.

Suy ra: $\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_i)\le\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{S}.f(S)+\dfrac{(n-1)S}{S}f(0)\Leftrightarrow\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_i)\le f\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)+(n-1)f(0)$.

39. Cho $a,b,c>0$ và $\alpha\in\mathbb{Z}^+$. Chứng minh: $\dfrac{a^\alpha}{b+c}+\dfrac{b^\alpha}{c+a}+\dfrac{c^\alpha}{a+b}\ge\dfrac{3}{2}.\dfrac{a^\alpha+b^\alpha+c^\alpha}{a+b+c}$.

HD: Không mất tính tổng quát, giả sử $a\ge b\ge c>0\Rightarrow\begin{cases}b+c\le a+c\le a+b\\ \dfrac{a^\alpha}{b+c}\ge\dfrac{b^\alpha}{c+a}\ge\dfrac{c^\alpha}{a+b}\end{cases}$.

Sử dụng bất đẳng thức Chebyshev cho 2 dãy đơn điệu ngược chiều ta có:

$$\frac{1}{2(a+b+c)}.\left(\frac{a^\alpha}{b+c}+\frac{b^\alpha}{c+a}+\frac{c^\alpha}{a+b}\right)\left[(b+c)+(c+a)+(a+b)\right]\ge\frac{3\left(a^\alpha+b^\alpha+c^\alpha\right)}{2(a+b+c)}.$$

40. Cho $a_1,a_2,...,a_n>0$ và hai số $\alpha,\beta>0$. Chứng minh rằng: $\dfrac{a_1^{\alpha+\beta}+a_2^{\alpha+\beta}+...+a_n^{\alpha+\beta}}{a_1^\beta+a_2^\beta+...+a_n^\beta}\ge\dfrac{a_1^\alpha+a_2^\alpha+...+a_n^\alpha}{n}$.

HD:

Giả sử: $0 < a_1 \le a_2 \le ... \le a_{n-1} \le a_n \Rightarrow \begin{cases} 0 < a_1^\alpha \le a_2^\alpha \le ... \le a_n^\alpha \\ 0 < a_1^\beta \le a_2^\beta \le ... \le a_n^\beta \end{cases}$.

Áp dụng bất đẳng thức Chebyshev ta có:

$n\left(a_1^\alpha.a_1^\beta + a_2^\alpha.a_2^\beta + ... + a_n^\alpha.a_n^\beta\right) \ge \left(a_1^\alpha + a_2^\alpha + ... + a_n^\alpha\right)\left(a_1^\beta + a_2^\beta + ... + a_n^\beta\right) \Leftrightarrow$ đpcm.

41. Giả sử phương trình: $ax^3 - x^2 + bx - c = 0$ có nghiệm dương. Chứng minh rằng: $2 + b \ge 63c$.

HD:

$$ax^3 - x^2 + bx - c = 0 \Leftrightarrow c\left(\frac{1}{x}\right)^3 - b\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \frac{1}{x} - a = 0\,(*).$$

Nếu x_1, x_2, x_3 là nghiệm của phương trình đã cho thì $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}$ là nghiệm của (*)

Ta có: $2 + b \ge 63c \Leftrightarrow 1 + \frac{b}{c} + \frac{1}{c} + \frac{1}{c} \ge 64 \Leftrightarrow 1 + \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) + \left(\frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_2x_3} + \frac{1}{x_3x_1}\right) + \frac{1}{x_1x_2x_3} \ge 64$

$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{x_1}\right)\left(1 + \frac{1}{x_2}\right)\left(1 + \frac{1}{x_3}\right) \ge 64 \text{ luôn đúng.}$$

BẤT ĐẲNG THỨC TỪ CÁC CUỘC THI TOÁN QUỐC TẾ

1. (IMO 1961). Cho a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác và diện tích là S. Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 \ge 4S\sqrt{3}$. Khi nào xảy đẳng thức?

Giải

Gọi α là góc đối diện với cạnh có độ dài bằng a trong tam giác.

Sử dụng $S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$; $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ ta có:

$a^2 + b^2 + c^2 \ge 4S\sqrt{3} \Leftrightarrow b^2 + c^2 \ge bc\left(\sqrt{3}\sin\alpha + \cos\alpha\right) \Leftrightarrow \left(b - c\right)^2 + 2bc\left(1 - \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)\right) \ge 0$ Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b = c$ và $\alpha = \frac{\pi}{3}$, nghĩa là tam giác trên là tam giác đều.

2. (IMO 1964). Ký hiệu a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$a^2\left(b + c - a\right) + b^2\left(c + a - b\right) + c^2\left(a + b - c\right) \le 3abc.$$

Giải

Để ý rằng: $abc - a^2\left(b + c - a\right) = a\left(bc - ab - ac + a^2\right) = a\left(a - b\right)\left(a - c\right)$.

Tương tự: $abc - b^2\left(c + a - b\right) = b\left(b - c\right)\left(b - a\right)$; $abc - c^2\left(a + b - c\right) = c\left(c - a\right)\left(c - b\right)$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$a\left(a - b\right)\left(a - c\right) + b\left(b - c\right)\left(b - a\right) + c\left(c - a\right)\left(c - b\right) \ge 0 \quad (*)$$

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức (*) đúng với giả thiết mạnh hơn là a, b, c không âm.

Thật vậy, VT(*) không thay đổi khi thay đổi vai trò của a, b, c. Vì vậy, ta có thể giả sử $a \ge b \ge c \ge 0$. Khi đó có thể biến đổi VT(*) như sau:

VT(*) $= a\left(a - b\right)\left[\left(a - b\right) + \left(b - c\right)\right] - b\left(a - b\right)\left(b - c\right) + c\left(a - c\right)\left(b - c\right)$

$= a\left(a - b\right)^2 + a\left(a - b\right)\left(b - c\right) - b\left(a - b\right)\left(b - c\right) + c\left(a - c\right)\left(b - c\right)$

$$= a(a-b)^2 + (a-b)^2(b-c) + c(a-c)(b-c) \geq 0 \text{ vì } a \geq b \geq c \geq 0.$$

3. (IMO 1969). Cho các số thực $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ thỏa mãn các điều kiện: $x_1 > 0, x_2 > 0$ và $x_1y_1 - z_1^2 > 0, x_2y_2 - z_2^2 > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2} \leq \frac{1}{x_1y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2y_2 - z_2^2}.$$

Thiết lập điều kiện cần và đủ để xảy ra dấu đẳng thức.

Giải

Xét các tam thức bậc hai: $P_1(X) = x_1X^2 - 2z_1X + y_1$; $P_2(X) = x_2X^2 - 2z_2X + y_2$

$$P(X) = P_1(X) + P_2(X) = (x_1+x_2)X^2 - 2(z_1+z_2)X + (y_1+y_2)$$

Đặt $D_1 = x_1y_1 - z_1^2$; $D_2 = x_2y_2 - z_2^2$; $D = (x_1+x_2)(y_1+y_2) - (z_1+z_2)^2$ thì P_1, P_2, P có biệt số lần lượt là $-D_1, -D_2$ và D .

Để ý rằng: $P_1(X) = x_1\left[\left(X - \frac{z_1}{x_1}\right)^2 + \frac{x_1y_1 - z_1^2}{x_1^2}\right] \geq \frac{x_1y_1 - z_1^2}{x_1} = \frac{D_1}{x_1}, \forall X$.

Dấu "=" xảy ra khi $X = \frac{z_1}{x_1}$.

Tương tự: $P_2(X) \geq \frac{D_2}{x_2}$, dấu "=" xảy ra khi $X = \frac{z_2}{x_2}$ và $P(X) \geq \frac{D}{x_1+x_2}$, dấu "=" xảy ra khi $X = \frac{z_1+z_2}{x_1+x_2}$.

Nhưng với mọi giá trị X ta có: $P(X) = P_1(X) + P_2(X) \geq \frac{D_1}{x_1} + \frac{D_2}{x_2}$ nên khi $X = \frac{z_1+z_2}{x_1+x_2}$ thì được

$$\frac{D}{x_1+x_2} \geq \frac{D_1}{x_1} + \frac{D_2}{x_2} \qquad (*)$$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{z_1}{x_1} = \frac{z_2}{x_2}$ ($P_1(X)$ và $P_2(X)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại cùng một điểm X).

Từ (*) sử dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số ta được:

$$\frac{8}{D} \leq \frac{8}{(x_1+x_2)\left(\frac{D_1}{x_1} + \frac{D_2}{x_2}\right)} \leq \frac{8}{2\sqrt{x_1x_2}.2\sqrt{\frac{D_1}{x_1}.\frac{D_2}{x_2}}} = \frac{2}{\sqrt{D_1D_2}} = 2\sqrt{\frac{1}{D_1}.\frac{1}{D_2}} \leq \frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{z_1}{x_1} = \frac{z_2}{x_2}, x_1 = x_2, D_1 = D_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2$.

4. (IMO 1971). Chứng minh rằng: bất đẳng thức sau chỉ đúng với $n = 3$ hoặc $n = 5$

$$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)...(a_1 - a_n) + (a_2 - a_1)(a_2 - a_3)...(a_2 - a_n) + ...$$
$$+ (a_n - a_1)(a_n - a_2)...(a_n - a_{n-1}) \geq 0, \forall a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}.$$

Giải

- Với $n = 4$, bất đẳng thức sai với $a_1 = 0$, $a_2 = a_3 = a_4 = 1$.
- Với $n > 5$, bất đẳng thức sai với $a_1 = ... = a_{n-4} = 0, a_{n-3} = a_{n-2} = a_{n-1} = 2, a_n = 1$.
- Với $n = 3$, bất đẳng thức cần chứng minh thành:

$$\left(a_1 - a_2\right)\left(a_1 - a_3\right) + \left(a_2 - a_3\right)\left(a_2 - a_1\right) + \left(a_3 - a_1\right)\left(a_3 - a_2\right) \geq 0.$$

Sử dụng tính đối xứng, ta giả sử được: $a_3 = \min\left\{a_1, a_2, a_3\right\}$. Khi đó ta có:

$$\sum\left(a_1 - a_2\right)\left(a_1 - a_3\right) = \left(a_1 - a_2\right)^2 + \left(a_1 - a_3\right)\left(a_2 - a_3\right) \geq 0 \text{ (đpcm)}$$

- Với $n = 5$, bất đẳng thức cần chứng minh thành:

$$\left(a_1 - a_2\right)\left(a_1 - a_3\right)\left(a_1 - a_4\right)\left(a_1 - a_5\right) + ... + \left(a_5 - a_1\right)\left(a_5 - a_2\right)\left(a_5 - a_3\right)\left(a_5 - a_4\right) \geq 0.$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq a_5$. Khi đó ta có:

$$\left(a_1 - a_2\right)\left(a_1 - a_3\right)\left(a_1 - a_4\right)\left(a_1 - a_5\right) + \left(a_2 - a_1\right)\left(a_2 - a_3\right)\left(a_2 - a_4\right)\left(a_2 - a_5\right) \geq 0$$

$$\left(a_3 - a_1\right)\left(a_3 - a_2\right)\left(a_3 - a_4\right)\left(a_3 - a_5\right) \geq 0$$

$$\left(a_4 - a_1\right)\left(a_4 - a_2\right)\left(a_4 - a_3\right)\left(a_4 - a_5\right) + \left(a_5 - a_1\right)\left(a_5 - a_2\right)\left(a_5 - a_3\right)\left(a_5 - a_4\right) \geq 0$$

Cộng vế theo vế ba bất đẳng thức này ta suy ra được đpcm.

5.(IMO 1973). Cho phương trình: $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thực, với a, b là các số thực. Tìm giá trị nhỏ nhất của $a^2 + b^2$.

Giải

Gọi x là nghiệm của phương trình. Xét $x = 0$ ta thấy $x^4 + 1 = 0$ (vô nghiệm), vì vậy $x \neq 0$.

Chia cả hai vế của phương trình trên cho x^2 ta được: $\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) + a\left(x + \dfrac{1}{x}\right) + b = 0$ (1)

Đặt $t = x + \dfrac{1}{x}, \left|t\right| \geq 2 \Rightarrow x^2 + \dfrac{1}{x^2} = t^2 - 2$.

Phương trình (1) thành: $t^2 - 2 + at + b = 0 \Leftrightarrow 2 - t^2 = at + b$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có:

$$\left|t^2 - 2\right| = \left|a.t + b.1\right| \leq \sqrt{a^2 + b^2}.\sqrt{t^2 + 1} \Rightarrow a^2 + b^2 \geq \frac{\left(t^2 - 2\right)^2}{t^2 + 1}.$$

Đặt $s = t^2 + 1$ thì $s \geq 5$ và $a^2 + b^2 \geq \dfrac{\left(s - 3\right)^2}{s}$.

Đến đây có ba hướng giải quyết:

Hướng 1: Xét hàm số $f\left(s\right) = \dfrac{\left(s - 3\right)^2}{s}, s \geq 5$ ta tìm được $\min\left(a^2 + b^2\right) = \min\limits_{s \in \left[5; +\infty\right)} f\left(s\right) = \dfrac{4}{5}$ tại $s = 5$.

Khi đó: $\left|t\right| = 2 \Leftrightarrow \left|x\right| = 1 \Leftrightarrow a = \pm\dfrac{4}{5}$ và $b = -\dfrac{2}{3}$.

Hướng 2: Ta có: $\dfrac{\left(s - 3\right)^2}{s} \geq \dfrac{4}{5} \Leftrightarrow 5s^2 - 34s + 45 \geq 0 \Leftrightarrow \left(s - 5\right)\left(5s - 9\right) \geq 0$ luôn đúng với $s \geq 5$

Hướng 3: Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\frac{(s-3)^2}{s}=s+\frac{9}{s}-6=\left(\frac{9s}{25}+\frac{9}{s}\right)+\frac{16s}{25}-6\ge 2\sqrt{\frac{9s}{25}.\frac{9}{s}}+\frac{16}{25}.5-6=\frac{4}{5}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow s=5$.

6. (IMO 1974). Cho $a,b,c,d>0$. Tìm tất cả các giá trị có thể có của biểu thức:

$$S=\frac{a}{a+b+d}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{b+c+d}+\frac{d}{a+c+d}.$$

Giải

Dễ dàng thấy được:

$$\frac{a}{a+b+c+d}+\frac{b}{a+b+c+d}+\frac{c}{a+b+c+d}+\frac{d}{a+b+c+d}<S<\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}+\frac{c}{c+d}+\frac{d}{c+d}$$ hay $1<S<2$.

Ta sẽ chứng minh tập giá trị của S là khoảng $(1;2)$.

Điều này có nghĩa là ta cần chỉ ra sự tồn tại nghiệm dương (a,b,c,d) của phương trình:

$$\frac{a}{a+b+d}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{b+c+d}+\frac{d}{a+c+d}=t \text{ với } t\in(1;2).$$

Chọn $a=x(1-x),b=x,c=1-x$ và $d=1$ với $x\in(0,1)$. Phương trình này trở thành:

$$f(x)=0 \text{ với } f(x)=\frac{x(1-x)}{1+2x-x^2}+\frac{x}{1+x-x^2}+\frac{1-x}{2}+\frac{1}{2-x^2}-t.$$

Ta có: $f(x)$ liên tục trên $(0;1)$ và $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1-t<0$, $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=2-t>0$ nên suy ra: $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm $x_0\in(0;1)$ hay nói cách khác tồn tại bộ số dương (a,b,c,d) thỏa mãn phương trình trên.

Vậy tập giá trị của S chính là khoảng $(1;2)$.

7. (IMO 1975). Cho các số thực dương $x_1,x_2,...,x_n$ và $y_1,y_2,...,y_n$ thỏa điều kiện: $x_1\ge x_2\ge ...\ge x_n, y_1\ge y_2\ge ...\ge y_n$. Chứng minh rằng nếu dãy các số $z_1,z_2,...,z_n$ là một hoán vị bất kì của các số $y_1,y_2,...,y_n$ thì ta có: $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\le\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2$.

Giải

Dễ dàng chứng minh được rằng:

Nếu $x\ge x', y\ge y'$ thì $(x-y)^2+(x'-y')^2\le(x-y')^2+(x'-y)^2$

Suy ra: nếu $i<j$ mà $z_i\le z_j$ thì khi đổi chỗ z_i,z_j cho nhau ta sẽ làm giảm tổng các bình phương xuống.

Thế nhưng, từ các số z_i (hoán vị của những y_i), ta cũng có thể quay về trật tự cũ (tức là vị trí các z_i được đưa về vị trí ban đầu của các y_i) bởi một dãy các phép đổi chỗ như đã nói. Từ đó ta suy ra điều phải chứng minh.

8. (IMO 1977). Cho a,b,A,B là các hằng số thực và

$$f(x)=1-a\cos x-b\sin x-A\cos 2x-B\sin 2x.$$

Giả sử $f(x)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$. Chứng minh rằng: $a^2+b^2\le 2$ và $A^2+B^2\le 1$.

Giải

Gọi y,z là các số thực sao cho: $\cos y = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin y = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$$\cos z = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \text{ , } \sin z = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Khi đó: biểu thức $f(x)$ thành: $f(x) = 1 - c\cos(x-y) - C\cos 2(x-z)$

với $c = \sqrt{a^2+b^2}, C = \sqrt{A^2+B^2}$.

Từ đó: $f(z) + f(\pi + z) \geq 0$ cho ta $C = \sqrt{A^2+B^2} \leq 1$ và $f\left(y+\dfrac{\pi}{4}\right) + f\left(y-\dfrac{\pi}{4}\right) \geq 0$ cho ta $c = \sqrt{a^2+b^2} \leq 2$. Điều phải chứng minh.

9. (IMO 1978). Cho $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ là một song ánh. Chứng minh rằng:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{f(k)}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \forall n$$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có: $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{f(k)}{k^2}\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{f(k)}\right) \geq \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}\right)^2$ (1)

Do f là song ánh nên: $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{f(k)} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra: $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{f(k)}{k^2} \geq \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}, \forall n$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $f(k) = k, \forall k \geq 1$.

10. (IMO 1983). Cho a,b,c là độ dài các cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0 \text{ .}$$

Hãy xác định xem dấu "=" xảy ra khi nào?

Giải

Đặt $a = y+z, b = z+x, c = x+y$; $x,y,z > 0$

Bất đẳng thức cần chứng minh thành: $xy^3 + yz^3 + zx^3 \geq xyz(x+y+z)$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta được:

$(xy^3 + yz^3 + zx^3)(x+y+z) \geq xyz(x+y+z)^2$. Suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

Từ đây, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{xy^3}{z} = \dfrac{yz^3}{x} = \dfrac{zx^3}{y} \Leftrightarrow x = y = z$. Suy ra: $a = b = c$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow$ tam giác trên là tam giác đều.

11. (IMO 1984). Chứng minh rằng: $0 \leq yz + zx + xy - 2xyz \leq \dfrac{7}{27}$ với x,y,z là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện: $x+y+z = 1$.

Giải

Ta có: $(1-2x)(1-2y)(1-2z) = 1-2(x+y+z)+4(xy+yz+zx)-8xyz$

$$= 4(yz+zx+xy)-8xyz-1 .$$

Suy ra: $yz+zx+xy-2xyz = \frac{1}{4}(1-2x)(1-2y)(1-2z)+\frac{1}{4}$

$$\le \frac{1}{4}.\frac{(1-2x+1-2y+1-2z)^3}{27}+\frac{1}{4} = \frac{1}{4}.\frac{1}{27}+\frac{1}{4} = \frac{7}{27} .$$

Ngoài ra, do giả thiết $x+y+z=1$ ta có: $yz+zx+xy-2xyz = xy(1-z)+xz(1-y)+yz \ge 0$.

Vậy ta suy ra được điều phải chứng minh.

12. (IMO 1995). Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện: $abc=1$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)} \ge \frac{3}{2}$.

Giải

Đặt $x=\frac{1}{a}, y=\frac{1}{b}, z=\frac{1}{c}$ thì $x,y,z>0$ và $xyz=1$.

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có: $x+y+z \ge 3$ và $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y} \ge \frac{3}{2}$.

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh có dạng: $\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y} \ge \frac{3}{2}$.

Không mất tính tổng quát, có thể giả sử $x \ge y \ge z > 0$.

Khi đó: $\frac{x}{y+z} \ge \frac{y}{z+x} \ge \frac{z}{x+y} > 0$.

Áp dụng bất đẳng thức Chybyshev ta có:

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{y+z} \ge \left(\frac{x+y+z}{3}\right)\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right) \ge \frac{3}{3}.\frac{3}{2} = \frac{3}{2} .$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$ hay $a=b=c=1$.

13. (IMO 1999). Cho số tự nhiên $n \ge 2$. Tìm hằng số C nhỏ nhất sao cho:

$$\sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j \left(x_i^2+x_j^2\right) \le C\left(x_1+x_2+...+x_4\right)^4, \forall x_1,x_2,...,x_n \ge 0 .$$

Với giá trị C vừa tìm được, hãy tìm điều kiện có đẳng thức xảy ra.

Giải

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j \left(x_i^2+x_j^2\right) \le \sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j \left(x_i^2+x_j^2+\sum_{k\ne i,j} x_k^2\right) = \left(\sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j\right)\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j\right)\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) \le \frac{1}{2}.\frac{\left(2\sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j+\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^2}{4} = \frac{1}{8}\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^4 .$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_i x_j\left(x_i^2+x_i^2\right) = x_i x_j\left(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2\right) \quad \forall i<j$

$$\text{và } x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 2\sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j .$$

Điều này chỉ có thể xảy ra khi có $n-2$ số x_i bằng 0 và hai số còn lại bằng nhau. Vì đẳng thức có thể xảy ra nên ta đi đến kết luận $\frac{1}{8}$ chính là giá trị nhỏ nhất có thể có của C .

14. (IMO 2000). Cho ba số thực dương a,b,c có tích bằng 1. Chứng minh rằng:

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\le 1.$$

Giải

Ta có: $\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)=ab-a+\frac{a}{c}-b+1-\frac{1}{c}+1-\frac{1}{b}+\frac{1}{bc}$.

Sử dụng $ab=\frac{1}{c}$ và $\frac{1}{bc}=a$ và lưu ý $b+\frac{1}{b}\ge 2$ ta được:

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\le \frac{a}{c}-b-\frac{1}{b}+2\le\frac{a}{c}.$$

Tương tự ta chứng minh được:

$$\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\le 1 \ ; \ \left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\le\frac{c}{b}.$$

Nhân vế theo vế các bất đẳng thức ta được điều phải chứng minh.

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$.

15. (IMO 2001). Cho các số thực dương a,b,c . Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\ge 1.$$

Giải

Cách 1:

Đặt $a'=\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}, b'=\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}, c'=\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}$,

$$x_1^2=\frac{a}{a'}, x_2^2=\frac{b}{b'}, x_3^2=\frac{c}{c'}, y_1^2=aa', y_2^2=bb', y_3^2=cc'$$

Suy ra: $x_1y_1=a, x_2y_2=b, x_3y_3=c$.

Từ bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta được:

$$\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)\left(y_1^2+y_2^2+y_3^2\right)\ge\left(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3\right)^2 \Leftrightarrow \frac{a}{a'}+\frac{b}{b'}+\frac{c}{c'}\ge\frac{\left(a+b+c\right)^2}{aa'+bb'+cc'}$$

Tiếp đến, ta lại đặt $X_1=\sqrt{a}, X_2=\sqrt{b}, X_3=\sqrt{c}, Y_1=\sqrt{a}.a', Y_2=\sqrt{b}\,b', Y_3=\sqrt{c}.c'$

Lại từ bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta được:

$$\left(X_1Y_1+X_2Y_2+X_3Y_3\right)^2\le\left(X_1^2+X_2^2+X_3^2\right)\left(Y_1^2+Y_2^2+Y_3^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{a'}+\frac{b}{b'}+\frac{c}{c'}\ge\frac{\left(a+b+c\right)^2}{\sqrt{a+b+c}\sqrt{aa'^2+bb'^2+cc'^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{a'}+\frac{b}{b'}+\frac{c}{c'} \ge \frac{(a+b+c)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{aa'^2+bb'^2+cc'^2}}$$

Mặt khác, ta lại có: $(a+b+c)^{\frac{3}{2}} \ge \sqrt{aa'^2+bb'^2+cc'^2} \Leftrightarrow (a+b+c)^3 \ge aa'^2+bb'^2+cc'^2$

Thay a',b',c' vào bất đẳng thức này rồi khai triển và biến đổi ta được bất đẳng thức tương đương là:

$3\left(ab^2+ac^2+ba^2+bc^2+ca^2+cb^2\right) \ge 18abc$

$$\Leftrightarrow a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2 \ge 0 \text{ .}$$

Suy ra: $\frac{a}{a'}+\frac{b}{b'}+\frac{c}{c'} \ge 1 \Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \ge 1$.

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c$.

Cách 2:

Trước hết, ta sẽ chứng minh rằng: $\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \ge \frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}}}$

hay $\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}}\right)^2 \ge a^{\frac{2}{3}}\left(a^2+8bc\right)$

Bất đẳng thức AM-GM cho ta:

$$\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}}\right)^2-\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2=\left(b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}}\right) \ge 2b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{2}{3}}.4a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}=8a^{\frac{2}{3}}bc$$

Suy ra: $\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}}\right)^2 \ge a^{\frac{2}{3}}\left(a^2+8bc\right)$, từ đó ta có: $\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \ge \frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}}}$.

Tương tự ta chứng minh được: $\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} \ge \frac{b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}}}, \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \ge \frac{c^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}}}$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức này ta tìm được bất đẳng thức cần chứng minh.

16. (IMO 2003). Cho số tự nhiên n và $x_1 \le x_2 \le ... \le x_n$ là các số thực.

a) Chứng minh rằng: $\left(\sum_{i,j=1}^{n}\left|x_i-x_j\right|\right)^2 \le \frac{2\left(n^2-1\right)}{3}\sum_{i,j=1}^{n}\left(x_i-x_j\right)^2$.

b) Chứng minh rằng: đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1,x_2,...,x_n$ là một cấp số cộng.

<u>Giải</u>

a) Do hai vế của bất đẳng thức đồng nhất nên không mất tính tổng quát giả sử $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$.

Ta có: $\sum_{i,j=1}^{n}\left|x_i-x_j\right| = \sum_{1 \le i < j \le n}\left(x_j-x_i\right) = 2\sum_{i=1}^{n}\left(2i-n-1\right)x_i$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n}\left|x_i-x_j\right|\right)^2 \le 4\left[\sum_{i=1}^{n}\left(2i-n-1\right)^2\right]\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)=\frac{4n\left(n^2-1\right)}{3}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 .$$

Mặt khác: $\sum_{i,j=1}^{n}\left(x_i-x_j\right)^2=n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n}x_j\right)+n\sum_{j=1}^{n}x_j^2=2n\sum_{i=1}^{n}x_i^2$.

Suy ra: $\left(\sum_{i,j=1}^{n}\left|x_i-x_j\right|\right)^2 \le \frac{2\left(n^2-1\right)}{3}\sum_{i,j=1}^{n}\left(x_i-x_j\right)^2$.

b) Khi đẳng thức xảy ra ta có: $x_i=k\left(2i-n-1\right)$ với k nào đó, tức là $x_1,x_2,...,x_n$ là một cấp số cộng. Mặt khác, giả sử $x_1,x_2,...,x_n$ là cấp số cộng với công sai d .

Khi đó ta có: $x_i=\frac{d}{2}\left(2i-n-1\right)+\frac{x_1+x_n}{2}$.

Giảm $\frac{x_1+x_n}{2}$ từ mỗi x_i , ta được $x_i=\frac{d}{2}\left(2i-n-1\right)$ và $\sum_{i=1}^{n}x_i=0$, từ đó suy ra đẳng thức.

17. (IMO 2004). Cho số tự nhiên $n\ge 3$ và $t_1,t_2,...,t_n$ là các số thực thỏa mãn:

$$n^2+1>\left(t_1+t_2+...+t_n\right)\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+...+\frac{1}{t_n}\right).$$

Chứng minh rằng: t_i,t_j,t_k là các cạnh của một tam giác với mọi $1\le i<j<k\le n$.

Giải

Do tính đối xứng nên ta chỉ cần chứng minh $t_1<t_2+t_3$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$n^2+1>\left(\sum_{i=1}^{n}t_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i}\right)=\left(t_1+t_2+t_3+\sum_{i=4}^{n}t_i\right)\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}+\sum_{i=4}^{n}\frac{1}{t_i}\right)$$

$$\ge\left[\sqrt{\left(t_1+t_2+t_3\right)\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}\right)}+\sqrt{\left(\sum_{i=4}^{n}t_i\right)\left(\sum_{i=4}^{n}\frac{1}{t_i}\right)}\right]^2$$

$$\ge\left[\sqrt{\left(t_1+t_2+t_3\right)\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}\right)}+n-3\right]^2$$

Suy ra: $\sqrt{\left(t_1+t_2+t_3\right)\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}\right)}<\sqrt{n^2+1}-n+3$.

Do $\sqrt{n^2+1}-n=\frac{1}{n+\sqrt{n^2+1}}\le\frac{1}{3+\sqrt{10}}=\sqrt{10}-3,\forall n\ge 3$ nên từ bất đẳng thức trên ta thu được:

$\left(t_1+t_2+t_3\right)\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}\right)<10$.

Giả sử $t_1\ge t_2+t_3$ ta có:

$$\left(t_1+t_2+t_3\right)\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}\right)=1+t_1\left(\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}\right)+\frac{t_2+t_3}{t_1}+\left(t_2+t_3\right)\left(\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}\right)$$

$\geq 1+\dfrac{4t_1}{t_2+t_3}+\dfrac{t_2+t_3}{t_1}+4=5+\dfrac{3t_1}{t_2+t_3}+\left(\dfrac{t_1}{t_2+t_3}+\dfrac{t_2+t_3}{t_1}\right)\geq 5+3+2=10$, vô lý.

Vậy ta có được điều phải chứng minh.

18. (IMO 2005). Cho ba số $x,y,z>0$ sao cho $xyz\geq 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2}\geq 0\,.$$

Giải

Cách 1:

Ta có: $\dfrac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}-\dfrac{x^5-x^2}{x^3\left(x^2+y^2+z^2\right)}=\dfrac{\left(x^3-1\right)^2x^2\left(y^2+z^2\right)}{x^3\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(x^5+y^2+z^2\right)}\geq 0$

Suy ra:

$$\sum\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}\geq\sum\frac{x^5-x^2}{x^3\left(x^2+y^2+z^2\right)}=\sum\frac{x^2-\frac{1}{x}}{x^5+y^2+z^2}\geq\sum\frac{x^2-\frac{xyz}{x}}{x^5+y^2+z^2}\ \text{(vì } xyz\geq 1)$$

$$=\frac{\sum x^2-\sum xy}{x^2+y^2+z^2}\geq 0\ .$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Cách 2:

Vì $\dfrac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}=1-\dfrac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}$ nên bài toán quy về việc chứng minh bất đẳng thức:

$$\sum\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}\leq 3\,.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và kết hợp với điều kiện $xyz\geq 1$ ta có:

$$\left(x^5+y^2+z^2\right)\left(yz+y^2+z^2\right)\geq\left(x^2\sqrt{xyz}+y^2+z^2\right)^2\geq\left(x^2+y^2+z^2\right)^2$$

$$\Rightarrow\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}\leq\frac{yz+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}\Rightarrow\sum\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}\leq 2+\frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}\leq 2+1=3$$

(vì $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$)

Cách 3:

Do $y^2+z^2\geq 2yz$ và $xyz\geq 1$ nên ta có:

$$\frac{1}{x^5+y^2+z^2}\leq\frac{1}{\frac{x^4}{y^4}+y^2+z^2}\leq\frac{1}{\frac{2x^4}{y^2+z^2}+y^2+z^2}$$

Ta sẽ chứng minh: $\sum\dfrac{1}{\dfrac{2x^4}{y^2+z^2}+y^2+z^2}\leq 3$?

Đây là một bất đẳng thức thuần nhất nên điều kiện $xyz\geq 1$ có thể bỏ qua để chuẩn hóa $x^2+y^2+z^2=3$. Bất đẳng thức trên trở thành:

$$\sum \frac{1}{\dfrac{2x^4}{3-x^2}+3-x^2} \le 1 \Leftrightarrow \sum \frac{3-x^2}{3x^4-6x^2+9} \le 1.$$

Do $3x^4-6x^2+9=3\left(x^2-1\right)^2+6 \ge 6;\ 3-x^2=y^2+z^2 \ge 0$ nên ta có:

$$\sum \frac{3-x^2}{3x^4-6x^2+9} \le \sum \frac{3-x^2}{6}=1.$$

19. (IMO 2006). Tìm số thực M nhỏ nhất sao cho

$$\left|ab\left(a^2-b^2\right)+bc\left(b^2-c^2\right)+ca\left(c^2-a^2\right)\right| \le M\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$$, với mọi a,b,c.

Giải

Xét đa thức: $P(t)=tb\left(t^2-b^2\right)+bc\left(b^2-c^2\right)+ct\left(c^2-t^2\right)$.

Dễ dàng kiểm tra được rằng: $P(b)=P(c)=P(-b-c)=0$ và do đó:

$$P(t)=(b-c)(t-b)(t-c)(t+b+c)$$, với hệ số là $b-c$.

Vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh có thể được viết lại dưới dạng:

$$\left|ab\left(a^2-b^2\right)+bc\left(b^2-c^2\right)+ca\left(c^2-a^2\right)\right|=\left|P(a)\right|=\left|(b-c)(a-b)(a-c)(a+b+c)\right|.$$

Bài toán quy về việc tìm số thực M nhỏ nhất sao cho:

$$\left|(b-c)(a-b)(a-c)(a+b+c)\right| \le M\left(a^2+b^2+c^2\right)^2 \qquad (1)$$

Để ý rằng biểu thức này là đối xứng và không mất tính tổng quát ta có thể giả sử rằng: $a \le b \le c$. Với điều giả sử này, ta có:

$$\left|(a-b)(b-c)\right|=(b-a)(c-b) \le \left(\frac{(b-a)+(c-b)}{2}\right)^2=\frac{(c-a)^2}{4} \qquad (2)$$

Dấu "=" xảy ra ở (2) khi và chỉ khi $b-a=c-b$ hay $2b=a+c$.

Hơn nữa, $\left(\dfrac{(c-b)+(b-a)}{2}\right)^2 \le \dfrac{(c-b)^2+(b-a)^2}{2}$

$$\Leftrightarrow 3(c-a)^2 \le 2\left[(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2\right] \qquad (3)$$

Dấu "=" xảy ra ở (3) khi và chỉ khi $2b=a+c$.

Từ (2) và (3) ta có:

$$\begin{aligned}&\left|(b-c)(a-b)(a-c)(a+b+c)\right|\\ &\le \frac{1}{4}\left|(c-a)^3(a+b+c)\right|\\ &=\frac{1}{4}\sqrt{(c-a)^6(a+b+c)^2}\end{aligned}$$

$$\le \frac{1}{4}\sqrt{\left(\frac{2.\left[(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2\right]}{3}\right)^3.(a+b+c)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt[4]{\left(\frac{(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2}{3}\right)^3(a+b+c)^2}\right)^2.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\left|(b-c)(a-b)(a-c)(a+b+c)\right| \le \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2+(a+b+c)^2}{4}\right)^2$$

$$=\frac{9\sqrt{2}}{32}\left(a^2+b^2+c^2\right)^2.$$

Ta thấy: (1) là thỏa mãn khi $M=\frac{9\sqrt{2}}{32}$ với dấu "=" xảy ra khi chỉ khi $2b=a+c$ và

$$\frac{(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2}{3}=(a+b+c)^2.$$

Thay $b=\frac{a+c}{2}$ vào phương trình cuối cùng ta được: $2(c-a)^2=9(a+c)^2$.

Các điều kiện xảy ra dấu đẳng thức có thể trình bày lại như sau:

$$2b=a+c \text{ và } (c-a)^2=18b^2.$$

Cho $b=1$, suy ra: $a=1-\frac{3\sqrt{2}}{2}, c=1+\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Ta thấy $M=\frac{9\sqrt{2}}{32}$ là giá trị cần tìm thỏa yêu cầu bài toán và dấu đẳng thức xảy ra khi bộ ba $(a;b;c)$ là $\left(1-\frac{3\sqrt{2}}{2};1;1+\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ cùng các hoán vị của nó.

20.(IMO 2007). Cho $a_1,a_2,...,a_n$ là các số thực. Với mỗi $i\ (1\le i\le n)$ xác định:

$d_i=max\{j:1\le j\le i\}-min\{j:i\le j\le n\}$ và đặt $d=max\{d_i:1\le i\le n\}$.

a) Chứng minh rằng: với mọi $x_1\le x_2\le ...\le x_n$, ta có $max\{|x_i-a_i|:1\le i\le n\}\ge\frac{d}{2}$.

b) Chứng minh rằng: tồn tại $x_1\le x_2\le ...\le x_n$ sao cho ta luôn có đẳng thức trong câu a)

Giải

a) Cho $1\le p\le q\le r\le n$ là các chỉ số mà

$$d=d_q, a_p=max\{a_j:1\le j\le q\}, a_r=min\{a_j:q\le j\le n\}$$

Do đó $d = a_p - a_q$ (các chỉ số này không cần duy nhất).

Với các số thực tùy ý $x_1 \le x_2 \le ... \le x_n$, xét hai đại lượng $\left|x_p - a_p\right|, \left|x_r - a_r\right|$.

Vì $\left(a_p - x_p\right) + \left(x_r - a_r\right) = \left(a_p - a_r\right) + \left(x_r - x_p\right) \ge a_p - a_r = d$ nên ta có:

$$\text{hoặc } a_p - x_p \ge \frac{d}{2} \text{ hoặc } x_r - a_r \ge \frac{d}{2}.$$

Vậy $max\left\{\left|x_i - a_i\right| : 1 \le i \le n\right\} \ge max\left\{\left|x_p - a_p\right|, \left|x_r - a_r\right|\right\} \ge max\left\{x_p - a_p, x_r - a_r\right\} \ge \frac{d}{2}$.

b) Với mỗi $1 \le i \le n$, đặt $M_i = max\left\{a_j : 1 \le j \le i\right\}$ và $m_i = min\left\{a_j : i \le j \le n\right\}$.

Đặt $x_i = \frac{m_i + M_i}{2}$. Rõ ràng $m_i \le a_i \le M_i$ mà $\left\{m_i\right\}, \left\{M_i\right\}$ là giảm. Hơn nữa, từ

$$d_i = M_i - m_i \Rightarrow -\frac{d_i}{2} = \frac{m_i - M_i}{2} = x_i - M_i \le x_i - a_i \le x_i - m_i = \frac{M_i - m_i}{2} = \frac{d_i}{2}$$

Vì vậy, $max\left\{\left|x_i - a_i\right| : 1 \le i \le n\right\} \le max\left\{\frac{d_i}{2} : 1 \le i \le n\right\} = \frac{d}{2}$. Đến đây, ta có đẳng thức.

21. (IMO 2012). Cho số nguyên $n \ge 3$ và các số thực dương $a_2, a_3, ..., a_n$ thỏa mãn $a_2 .. a_n = 1$. Chứng minh rằng: $\left(1 + a_2\right)^2 \left(1 + a_3\right)^3 ... \left(1 + a_n\right)^n > n^n$.

Giải

Cách 1:

Với mỗi $k \ge 2$ ta viết $a_k + 1 = a_k + \frac{1}{k-1} + ... + \frac{1}{k-1}$ ($k-1$ phân số $\frac{1}{k-1}$).

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho k số ta được: $a_k + 1 \ge k\sqrt[k]{\frac{a_k}{\left(k-1\right)^{k-1}}}$

hay $\left(a_k + 1\right)^k \ge \frac{k^k}{\left(k-1\right)^{k-1}} a_k$. Do đó: $VT \ge \frac{2^2}{1} . \frac{2^3}{2^2} ... \frac{n^n}{\left(n-1\right)^{n-1}} = n^n$.

Vì dấu "=" không đồng thời xảy ra nên $VT > n^n$.

Cách 2:

Với mỗi $k \ge 2$ xét hàm số: $f_k\left(x\right) = \frac{\left(x+1\right)^k}{x}$ trên khoảng $\left(0; +\infty\right)$.

Hàm số liên tục và có đạo hàm $f_k'\left(x\right) = \frac{\left(1+x\right)^{k-1}\left(\left(k-1\right)x - 1\right)}{x^2}$.

Do đó hàm này đạt cực tiểu tại $x_k = \frac{1}{k-1}$ hay $f_k\left(x\right) \ge f_k\left(x_k\right) = \frac{k^k}{\left(k-1\right)^{k-1}}$.

Vậy nên $\left(a_2 + 1\right)^2 \left(a_3 + 1\right)^3 .... \left(a_n + 1\right)^n \ge n^n a_2 a_3 .. a_n = n^n$.

Vì dấu "=" không đồng thời xảy ra nên $(1+a_2)^2(1+a_3)^3...(1+a_n)^n > n^n$.

Cách 3:

Với mỗi $k \geq 2$ ta sẽ tìm số thực a lớn nhất để $(x+1)^k \geq ax$, với mọi $x \in (0;+\infty)$.

Ta xét hàm số: $f_k(x) = (x+1)^k - ax$. Hàm số liên tục và có đạo hàm $f_k'(x) = k(1+x)^{k-1} - a$. Suy ra:

phương trình $f_k'(x) = 0$ có nghiệm $x_0 = \left(\frac{a}{k}\right)^{\frac{1}{k-1}} - 1$.

Do đó hàm này đạt cực tiểu tại $x_0 = \left(\frac{a}{k}\right)^{\frac{1}{k-1}} - 1$.

Bây giờ ta cần tìm a để $f_k(x_0) = 0$, bởi thế nên cho $a = \frac{k^k}{(k-1)^{k-1}}$.

Vậy ta đã chứng minh được: $(1+x)^k \geq \frac{k^k}{(k-1)^{k-1}}x$, với mọi $x \in (0;+\infty)$.

Áp dụng bất đẳng thức này cho các số dương $a_2, a_3, ..., a_n$ ta được:

$(a_2+1)^2(a_3+1)^3....(a_n+1)^n \geq n^n a_2 a_3 ... a_n = n^n$.

Vì dấu "=" không đồng thời xảy ra nên $(1+a_2)^2(1+a_3)^3...(1+a_n)^n > n^n$.

CHƯƠNG II: PHƯƠNG TRÌNH HÀM

1. Cho hàm số $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ thỏa mãn $f(1) = 0$ và $f(m+n) = f(m) + f(n) + 3(4mn-1)$, $\forall m, n \in \mathbb{Z}$.

HD:

- Thay $m = n = 1$, ta có: $f(2) = 2f(1) + 9 = 9$;
- Thay $m = n = 2$, ta có: $f(4) = 2f(2) + 45 = 63$;
- Thay $m = n = 4$, ta có: $f(8) = 2f(4) + 189 = 315$;
- Thay $m = n = 8$, ta có: $f(16) = 2f(8) + 765 = 1395$;
- Thay $m = 2$, $n = 1$ ta có: $f(3) = f(2) + f(1) + 21 = 30$.
- Thay $m = 16, n = 3$ ta có kết quả: $f(19) = f(16+3) = f(16) + f(3) + 573 = 1998$.

2. Cho hàm số $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ thỏa mãn $f(1) = 5$; $f(f(n)) = 4n + 9$ và $f(2^n) = 2^{n+1} + 3$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Tính $f(1789)$.

HD:

Ta có: $1789 = 4.445 + 9$; $445 = 4.109 + 9$; $109 = 4.25 + 9$; $25 = 4.4 + 9$

Lần lượt áp dụng các giả thiết ta được:

$$f\left(4\right) = 8 + 3 = 11;$$

$$f\left(11\right) = f\left(f\left(4\right)\right) = 4.4 + 9 = 25;$$

$$f\left(25\right) = f\left(f\left(11\right)\right) = 4.11 + 9 = 53;$$

$$f\left(53\right) = f\left(f\left(25\right)\right) = 4.25 + 9 = 109;$$

$$f\left(109\right) = f\left(f\left(53\right)\right) = 4.53 + 9 = 221;$$

$$f\left(221\right) = f\left(f\left(109\right)\right) = 4.109 + 9 = 445;$$

$$f\left(445\right) = f\left(f\left(221\right)\right) = 4.221 + 9 = 893;$$

$$f\left(893\right) = f\left(f\left(445\right)\right) = 4.445 + 9 = 1789;$$

$$f\left(1789\right) = f\left(f\left(9893\right)\right) = 4.893 + 9 = 3581$$

3. Cho hàm số f xác định trên tập $\mathbb{N}^*$ và thỏa mãn:

$$f\left(n+1\right) = n\left(-1\right)^{n+1} - 2f\left(n\right) \; ; \; f\left(1\right) = f\left(2013\right).$$

Tính tổng $S = f\left(1\right) + f\left(2\right) + ... + f\left(2012\right)$.

HD:

Ta có: $f\left(2\right) = 1 - 2f\left(1\right)$; $f\left(3\right) = -2 - 3f\left(2\right)$; $f\left(4\right) = 3 - 2f\left(3\right)$; ...;

$f\left(2012\right) = 2011 - 2f\left(2011\right)$; $f\left(2013\right) = -2012 - 2f\left(2012\right)$.

Cộng vế theo vế các đẳng thức trên ta được:

$$f\left(2\right) + f\left(3\right) + ... + f\left(2012\right) + f\left(2013\right) = 1 - 2 + 3 - 4 + ... + 2011 - 2012 - 2\sum_{k=1}^{2012} f\left(k\right).$$

Thay $f\left(2013\right) = f\left(1\right)$ ta được: $\sum_{k=1}^{2012} f\left(k\right) = -1006 - 2\sum_{k=1}^{2012} f\left(k\right) \Rightarrow \sum_{k=1}^{2012} f\left(k\right) = -\dfrac{1006}{3}$.

4. Cho hàm số f xác định trên tập các số nguyên dương và thỏa mãn:

$$f\left(1\right) = 1006 \; ; \; f\left(1\right) + f\left(2\right) + ... + f\left(n\right) = n^2 f\left(n\right) \;\; \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Tính $f\left(2012\right)$.

HD:

Từ giả thiết bài toán ta có: $(n-1)^2 f(n-1)+f(n)=n^2 f(n) \Rightarrow \dfrac{f(n)}{f(n-1)}=\dfrac{n-1}{n+1}$.

Cho $n=2,3,...,2012$ ta được: $\dfrac{f(2)}{f(1)}=\dfrac{1}{3}$; $\dfrac{f(3)}{f(2)}=\dfrac{2}{4}$; $\dfrac{f(4)}{f(3)}=\dfrac{3}{5}$; ...; $\dfrac{f(2012)}{f(2011)}=\dfrac{2011}{2013}$.

Nhân vế theo vế các đẳng thức trên ta được: $\dfrac{f(2012)}{f(1)}=\dfrac{1}{1006.2013} \Leftrightarrow f(2012)=\dfrac{1}{2013}$.

5. Cho hàm số $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ thỏa mãn: $xf(y)+yf(x)=(x+y)f(x^2+y^2)$, $\forall x,y\in\mathbb{N}$.

Chứng minh rằng: f là hàm hằng.

Giả sử: f không là hàm hằng. Chọn x,y sao cho $f(y)-f(x)>0$ và bé nhất.

Từ

$$f(x)=\frac{xf(x)+yf(x)}{x+y}<\frac{xf(y)+yf(x)}{x+y}<\frac{xf(y)+yf(y)}{x+y}=f(y)\Rightarrow 0<f(x^2+y^2)-f(x)<f(y)-f(x)$$

Điều này mâu thuẫn nên f là hàm hằng.

6. Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ thỏa mãn các điều kiện:

$$f(1)=1; f(m+n)=f(m)+f(n)+mn\ \forall m,n\in\mathbb{N}^*$$

HD:

Cho $m=1$ ta thược: $f(n+1)=f(n)+n+1$. Từ đây suy ra nếu tồn tại hàm số thì đó là duy nhất.

Bằng phương pháp quy nạp, chứng minh: $f(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

7. Cho hàm số $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ thỏa mãn điều kiện $f(m)\neq f(n)$ nếu $m-n$ là số nguyên tố. Hỏi tập giá trị của hàm f có ít nhất bao nhiêu phần tử?

HD:

Ta có: $3-1=2;\ 6-3=3;\ 6-1=5;\ 8-3=5;\ 8-6=2$ là các số nguyên tố nên $f(1); f(3); f(6); f(8)$ phải khác nhau. Do đó tập giá trị của hàm f có ít nhất 4 phần tử.

Xét hàm số $f(n)$ xác định như sau: Nếu $n\equiv r(\mathrm{mod}\,4)$ thì $f(n)=r$. Khi đó tập giá trị của hàm f có 4 phần tử là: $0;1;2;3$.

Ta chứng tỏ hàm f xây dựng như trên thỏa mãn điều kiện bài toán.

Thật vậy, nếu $f(m)=f(n)$ thì $m\equiv n(\mathrm{mod}\,4)\Leftrightarrow m-n\equiv 0(\mathrm{mod}\,4)\Rightarrow m-n$ là hợp số.

Vậy tập giá trị của hàm f có ít nhất 4 phần tử.

8. Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ thỏa mãn điều kiện: $f\left(m+f\left(n\right)\right)=f\left(m\right)+n\ \ \forall m,n\in\mathbb{N}$.

HD:

Giả sử: $f\left(0\right)=a>0$.

Khi đó: $f\left(m+f\left(0\right)\right)=f\left(m\right)$ hay $f\left(m+a\right)=f\left(m\right),\ \forall m\in\mathbb{N}$. Vì thế f là hàm tuần hoàn và như thế giá trị của f là tập $A=\left\{f\left(0\right);f\left(1\right);...;f\left(a-1\right)\right\}$.

Ta gọi M là số lớn nhất trong A. Khi đó: $f\left(n\right)\le M\ \ \forall n\in\mathbb{N}$.

Mặt khác: thay $m=0$ vào $f\left(m+f\left(n\right)\right)=f\left(m\right)+n$ ta được: $f\left(f\left(n\right)\right)=n+a$ có thể lớn tùy ý, vô lý.

Vậy ta phải có $f\left(0\right)=0$. Khi đó: $f\left(f\left(n\right)\right)=n\ \ \forall n\in\mathbb{N}$.

Nếu $f\left(1\right)=0$ thì $0=f\left(0\right)=f\left(f\left(1\right)\right)=1$, mâu thuẫn. Do đó: $f\left(1\right)=b>0$.

Chứng minh quy nạp: $f\left(n\right)=bn\ \ \forall n\in\mathbb{N}$?

Ta có: $f\left(bn\right)=b^2n=n\Rightarrow b=1$. Vậy $f\left(n\right)=n\ \ \forall n\in\mathbb{N}$. Thử lại thấy đúng.

9. Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ thỏa mãn điều kiện: $f\left(mn+1\right)=mf\left(n\right)+2\ \ \forall m,n\in\mathbb{N}$.

HD:

- Thay $m=0$ ta có: $f\left(1\right)=2$.

- Lại thay $n=0$ ta có: $f\left(1\right)=mf\left(0\right)+2\Rightarrow mf\left(0\right)=0\ \ \forall m\in\mathbb{N}\Rightarrow f\left(0\right)=0$ (1)

- Thay $n=1$ ta có: $f\left(m+1\right)=mf\left(1\right)+2=2m+2=2\left(m+1\right)\Rightarrow f\left(m\right)=2m,\ \forall m\in\mathbb{N}^*$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $f\left(m\right)=2m\ \ \forall m\in\mathbb{N}$. Vậy $f\left(n\right)=2n\ \ \forall n\in\mathbb{N}$.

10. Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ thỏa mãn các điều kiện:

$$f\left(f\left(n\right)\right)=n+2;\ f\left(f\left(n+1\right)+1\right)=n+4;\ f\left(0\right)=1\ \ \ \forall n\in\mathbb{N}.$$

HD:

- Chứng minh f là một đơn ánh?

- Ta có: $f\left(f\left(n+2\right)\right)=n+4=f\left(f\left(n+1\right)+1\right)\Rightarrow f\left(n+2\right)=f\left(n+1\right)+1$.

Hay $f\left(n\right)=f\left(0\right)+n=n+1\ \ \forall n\in\mathbb{N}$ (thỏa mãn).

11. Cho hàm số $f\left(n\right)$ xác định trên tập hợp các số nguyên dương và thỏa mãn:

$$f\left(1\right)=2\ \text{ và }\ f\left(n+1\right)=f^2\left(n\right)-f\left(n\right)+1\ ;\ n=1;2;3;...$$

Chứng minh: $1-\frac{1}{2^{2^{2011}}}<\frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(2)}+...+\frac{1}{f(2012)}<1-\frac{1}{2^{2^{2012}}}$.

HD:

- Ta có: $f(n+1)-f(n)=(f(n)-1)^2 \Rightarrow f$ tăng và $f(n)\geq 2\ \forall n\in\mathbb{N}^*$

- Chứng minh: $\frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(2)}+...+\frac{1}{f(n)}=1-\frac{1}{f(n+1)-1}$?

- Chứng minh quy nạp: $2^{2^{n-1}}<f(n+1)-1<2^{2^n}$?

- Cho $n=2012$ ta suy ra điều phải chứng minh.

12. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{Q}^+\to\mathbb{Q}^+$ thỏa mãn: $f(x+1)=f(x)+1$; $f(x^2)=f^2(x)\quad \forall x\in\mathbb{Q}^+$.

- Chứng minh quy nạp: $f(x+n)=f(x)+n\ \ \forall x\in\mathbb{Q}^+,\forall n\in\mathbb{N}$?

- Với $x=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}^+\ \left(p,q\in\mathbb{N}^*\right)$.Giả sử: $f\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{m}{n}\ \left(m,n\in\mathbb{N}^*\right)\Rightarrow f\left(\frac{p^2}{q^2}\right)=\frac{m^2}{n^2}$.

Khi đó: $f\left(\frac{p}{q}+q\right)=f\left(\frac{p}{q}\right)+q=\frac{m}{n}+q\Rightarrow f\left(\frac{p^2}{q^2}+2p+q^2\right)=\frac{m^2}{n^2}+\frac{2mq}{n}+q^2$

Hay $f\left(\frac{p^2}{q^2}\right)+2p+q^2=\frac{m^2}{n^2}+\frac{2mq}{n}+q^2\Rightarrow\frac{2mq}{n}=2p\Rightarrow\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$.

Vậy $f(x)=x\ \ \forall x\in\mathbb{Q}^+$.

13. Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+2f(y)\ \ \forall x,y\in\mathbb{Q}.$$

HD:

- Cho $x=y=0$ ta được: $2f(0)=4f(0)\Rightarrow f(0)=0$.

- Với $x=ny\ \ (n\in\mathbb{N})$ ta được: $f((n+1)y)=f(ny+y)=2f(ny)+2f(y)-f((n-1)y)$.

- Chứng minh quy nạp: $f(nx)=n^2f(x)\ \ \forall n\in\mathbb{N}$?

- Thay x bởi $\frac{1}{n}$ ta được: $f(1)=n^2f\left(\frac{1}{n}\right)\Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{f(1)}{n^2}$.

- Ta có: $f\left(\frac{m}{n}\right)=f\left(m.\frac{1}{n}\right)=m^2f\left(\frac{1}{n}\right)=\left(\frac{m}{n}\right)^2f(1)$.

Do đó: $f(x)=ax^2\ \ \forall x\in\mathbb{Q}$, trong đó: $a=f(1)$. Thử lại thấy đúng.

14. Tồn tại hay không hàm $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ thỏa mãn điều kiện: $f(x+f(y))=f(x)-y\ \ \forall x,y\in\mathbb{Q}$.

HD:

- Chứng minh f là đơn ánh ?

- Cho $x=y=0$ ta được: $f\left(f\left(0\right)\right)=f\left(0\right)\Rightarrow f\left(0\right)=0$

- Cho $x=0$ ta được: $f\left(f\left(y\right)\right)=-y\quad \forall y\in\mathbb{Q}\quad (*)$

- Thay $f\left(y\right)$ bởi y vào điều kiện bài toán đã cho và chú ý đến (*) ta có: $f\left(x+y\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right)$.

Do đó: $y=kx\quad \forall x\in\mathbb{Q}$. Thay vào điều kiện bài toán đã cho ta suy ra được: $k^2=-1$, vô lý.

Vậy không tồn tại hàm số nào thỏa mãn yêu cầu bài toán.

15. Đặt $q=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ và gọi $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ là hàm số thỏa mãn điều kiện $\left|f\left(n\right)-qn\right|<\dfrac{1}{q}\quad \forall n\in\mathbb{N}$.

Chứng minh rằng $f\left(f\left(n\right)\right)=f\left(n\right)+n\ \forall n\in\mathbb{N}$.

HD:

- Từ $1>\dfrac{1}{q}>\left|f\left(0\right)\right|\geq 0\Rightarrow f\left(0\right)=0$. Như vậy điều kiện $\left|f\left(n\right)-qn\right|<\dfrac{1}{q}$ đúng với $n=0$.

- Với $n>0$ thì $f\left(n\right)>0$. Thật vậy, nếu $f\left(n\right)=0$ thì từ $\left|f\left(n\right)-qn\right|<\dfrac{1}{q}$ cho ta:

$$\left|-qn\right|<\frac{1}{q}\Leftrightarrow qn<\frac{1}{q}\Leftrightarrow 0<n<\frac{1}{q^2}<1, \text{ vô lý.}$$

- Để ý rằng $q\left(q-1\right)=1$. Từ đó với $n>0$ tùy ý ta có:

$$\left|f\left(f\left(n\right)\right)-f\left(n\right)-n\right|=\left|f\left(f\left(n\right)\right)-qf\left(n\right)+\left(q-1\right)f\left(n\right)-q\left(q-1\right)n\right|$$

$$=\left|f\left(f\left(n\right)\right)-qf\left(n\right)+\left(q-1\right)\left(f\left(n\right)-qn\right)\right|\leq\left|f\left(f\left(n\right)\right)-qf\left(n\right)\right|+\left|\left(q-1\right)\left(f\left(n\right)-qn\right)\right|$$

$$=\left|f\left(f\left(n\right)\right)-qf\left(n\right)\right|+\left(q-1\right)\left|f\left(n\right)-qn\right|$$

Từ $\left|f\left(n\right)-qn\right|<\dfrac{1}{q}$ thay n bởi $f\left(n\right)$ ta có: $\left|f\left(f\left(n\right)\right)-qf\left(n\right)\right|<\dfrac{1}{q}$.

Vậy $\left|f\left(f\left(n\right)\right)-f\left(n\right)-n\right|<\dfrac{1}{q}+\left(q-1\right).\dfrac{1}{q}=1$.

Do $f\left(f\left(n\right)\right)-f\left(n\right)-n\in\mathbb{Z}$ nên $f\left(f\left(n\right)\right)=-f\left(n\right)-n=0\Leftrightarrow f\left(f\left(n\right)\right)=f\left(n\right)+n$.

16. Chứng minh rằng không tồn tại song ánh $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}$ thỏa mãn điều kiện:

$$f\left(mn\right)=f\left(m\right)+f\left(n\right)+3f\left(m\right)f\left(n\right)\quad \forall m,n\in\mathbb{N}^*$$

HD:

Giả sử tồn tại hàm f thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Cho $m=1$ ta được: $f(n)=f(n)+f(1)+3f(1)f(n)$. Nếu $f(1)>0$ thì $f(n)<0$, vô lý. Vậy phải có: $f(1)=0$. Vì f là song ánh nên $f(n)\ge 1\ \forall n\ge 2$.

- Suy ra nếu n là hợp số thì $f(n)\ge 5$.

Cũng do f song ánh nên có duy nhất $p,q,r\in\mathbb{N}^*$ sao cho $f(p)=1,\ f(q)=3,\ f(r)=8$. Chú ý rằng p,q là các số nguyên tố phân biệt. Khi đó: $f(q^2)=f(pr)=33\Rightarrow q^2=pr$, vô lý. Vậy không tồn tại hàm số.

17. Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ sao cho với mọi $m,n,k\in\mathbb{N}$ ta đều có:

$$f(km)+f(kn)-f(k)f(mn)\ge 1.$$

HD:

- Cho $k=m=n=0\Rightarrow (f(0)-1)^2\le 0\Rightarrow f(0)=1$.

- Cho $m=n=k=1\Rightarrow f(1)=1$.

- Cho $m=n=0\ \Rightarrow f(k)\le 1\ \forall k\in\mathbb{N}$.

- Cho $k=1, m=0\Rightarrow f(n)\ge 1\ \forall n\in\mathbb{N}$.

Suy ra: $f(n)=1\ \forall n\in\mathbb{N}$.

18. Cho $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ thỏa mãn các điều kiện: $f(m^2f(n))=mnf(m)\quad \forall m,n\in\mathbb{N}^*$.

Chứng minh rằng nếu $f(2003)=a^2$ thì a là số nguyên tố.

HD:

- Chứng minh f là đơn ánh và $f(1)=1$?

- Dễ thấy $f(f(n))=n\ \ \forall n\in\mathbb{N}^*$. Thay n bởi $f(n)$ có:

$f(m^2f(f(n)))=mf(n)f(m)\Rightarrow f(m^2n)=mf(m)f(n)$.

Vậy $f(m^2)=mf(m)\ \forall m$ và $f(m^2n^2)=mf(m)f(n^2)=f(m^2)f(n^2)$, nghĩa là f nhân tính trên tập hợp các số chính phương.

Giả sử $f(2003)=a^2$ với a là hợp số, nghĩa là $a=mn$ với $m\ge n>1$.

Khi đó: $f(f(2003))=f(a^2)=f(m^2n^2)\Rightarrow 2003=f(m^2)f(n^2)$ Vô lý vì 2003 là số nguyên tố.

19. Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện:

(i) f tăng thực sự

(ii) $f\left(mf\left(n\right)\right)=n^2f\left(mn\right) \quad \forall m,n\in\mathbb{N}^*$.

HD:

- Thay $m=1$ ta có: $f\left(f\left(n\right)\right)=n^2f\left(n\right)$.

- Giả sử $f\left(n\right)>n^2\Rightarrow f\left(f\left(n\right)\right)>f\left(n^2\right)\Rightarrow n^2f\left(n\right)>f^2\left(n\right)\Rightarrow f\left(n\right)<n^2$, vô lý.

- Tương tự ta cũng chứng minh được: $f\left(n\right)<n^2$.

Vậy $f\left(n\right)=n^2 \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$.

20. Tìm tất cả các hàm f thỏa mãn hai điều kiện:

(i) $\forall m,n\in\mathbb{N}$ thì $2f\left(m^2+n^2\right)=f^2\left(m\right)+f^2\left(n\right)$

(ii) $\forall m,n\in\mathbb{N}$ mà $m\geq n$ thì $f\left(m^2\right)\geq f\left(n^2\right)$.

HD:

- Cho $m=0$ và $n=0$ ta được $2f\left(n^2\right)=f^2\left(n\right)+f^2\left(0\right)$ và $2f\left(m^2\right)=f^2\left(m\right)+f^2\left(0\right)$.

Do đó $f^2\left(m\right)-f^2\left(n\right)=2\left(f\left(m^2\right)-f^2\left(n^2\right)\right)$.

- Cho $m=n=0$ có $f\left(0\right)=0$ hay $f\left(0\right)=1$.

+ Nếu $f\left(0\right)=1$ thì ta có: $2f\left(m^2\right)=f^2\left(m\right)+1\Rightarrow f\left(1\right)=1\Rightarrow f\left(2\right)=1$.

Từ đẳng thức: $f\left(2^{2^n}\right)=\frac{1}{2}\left(f\left(2^{2^{n-1}}\right)^2+1\right)$, bằng quy nạp ta có: $f\left(2^{2^n}\right)=1\ \forall n$.

Với n tùy ý luôn có số k sao cho $2^{2^{k-1}}<n<2^{2^k}\Rightarrow f\left(2^{2^{k-1}}\right)\leq f\left(n\right)\leq f\left(2^{2^k}\right)\Rightarrow f\left(n\right)=1$.

+ Nếu $f\left(0\right)=0\Rightarrow f\left(1\right)=0$ hoặc $f\left(1\right)=2$.

Với $f\left(1\right)=0$ ta có hàm số $f\left(n\right)=0$ và với $f\left(1\right)=2$ ta có $f\left(n\right)=2n$.

21. Xác định hàm số $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ thỏa mãn điều kiện: $f\left(f\left(n\right)+f\left(m\right)\right)=n+m\ \forall n,m\in\mathbb{N}$.

HD:

Giả sử tồn tại hàm f thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Chứng minh f là đơn ánh ?

- $\forall n\in\mathbb{N}^*$ ta có: $f\left(f\left(n\right)+f\left(n\right)\right)=n+n=2n=\left(n-1\right)+\left(n+1\right)=f\left(f\left(n-1\right)+f\left(n+1\right)\right)$

$\Rightarrow f\left(n\right)+f\left(n\right)=f\left(n-1\right)+f\left(n+1\right)\Rightarrow f\left(n+1\right)-f\left(n\right)=f\left(n\right)-f\left(n-1\right) \quad \forall n\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow f$ là hàm tuyến tính tức f có dạng: $f\left(n\right)=an+b$.

Thử lại ta có: $a\left[(an+b)+(am+b)\right]+b=m+n \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow a=1, b=0$.

Suy ra: $f(n)=n$.

22. Cho $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$. Chứng minh rằng tồn tại $x_0\in\mathbb{Z}$ sao cho: $f\left(f\left(x_0\right)\right)\neq 1-x_0^4$.

HD: Giả sử: $f\left(f(x)\right)=1-x^4\ \forall x\in\mathbb{Z}$

Dễ thấy: $f(1)=1-f^4(0)$; $f(0)=1-f^4(1)$.

Suy ra: $f(1)-f(0)=f^4(1)-f^4(0)=\left[f(1)-f(0)\right]\left[f(1)+f(0)\right]\left[f^2(1)+f^2(0)\right]$.

Chứng minh $f(1)-f(0)\neq 0$?

Khi đó: $\left[f(1)+f(0)\right]\left[f^2(1)+f^2(0)\right]=1\Rightarrow\begin{cases}f(1)+f(0)=1\\ f^2(1)+f^2(0)=1\end{cases}$

hay $f(1)=1, f(0)=0$ hoặc $f(1)=0, f(0)=1$.

Giả sử: $f(1)=1, f(0)=0$. Suy ra: $f\left(f(1)\right)=f(1), f\left(f(0)\right)=f(0)$. Điều này mâu thuẫn.

23. Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ thỏa mãn các điều kiện:

(i) $f\left(f(n)\right)=f(n)$

(ii) $f\left(f(m)+f(n)\right)=f(m+n)$

(iii) f nhận vô số giá trị.

HD:

Giả sử tồn tại $m_1\neq m_2$ mà $f(m_1)=f(m_2)$. Ta có thể xem $m_2>m_1$.

Khi đó với mọi n ta có: $f\left(f(m_1)+f(n)\right)=f\left(f(m_2)+f(n)\right)\Rightarrow f(m_1+n)=f(m_2+n)$.

Dễ có $f(n)=f(n+d)$ với $d=m_2-m_1>0$. Như thế f là hàm tuần hoàn và do đó chỉ nhận hữu hạn giá trị.

Điều này mâu thuẫn với (iii).

Suy ra f là một đơn ánh. Từ (i) có ngay $f(n)=n\ \forall n\in\mathbb{Z}$.

24. Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ thỏa mãn $f(n+m)+f(n-m)=f(3n)\ \forall m,n\in\mathbb{N}$ và $n\geq m$.

HD:

- Cho $m=0$ ta có: $2f(n)=f(3n)\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

- Cho $m=n=0$ ta được: $2f(0)=f(0)\Rightarrow f(0)=0$.

- Cho $m=n$ ta được: $f(2n)=f(3n)\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Suy ra: $f(4m)=f(6m)=f(2.3m)=f(3.3m)=f(9m)$.

Như thế: $f(2m)=0\ \forall m\in\mathbb{N}^*$.Cuối cùng $\forall m\in\mathbb{N}^*$ ta có: $f(m)=\frac{1}{3}f(3m)=\frac{1}{2}f(2m)=0$.

Kiểm tra hàm số: $f(n)=0\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

25. Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn: $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy\ \forall x,y\in\mathbb{Q}$.

HD: Từ điều kiện bài toán ta có: $f(x+y)-(x+y)^2=f(x)-x^2+f(y)-y^2$.

Đặt $g(x)=f(x)-x^2$, như vậy $g(x+y)=g(x)+g(y)$ .Dễ dàng có: $g(0)=0$.Đặt $g(1)=k$.

Chứng minh quy nạp: $g(nx)=ng(x)\ \ \forall x\in\mathbb{Q}$

Lại có: $k=g(1)=g\left(n.\frac{1}{n}\right)=ng\left(\frac{1}{n}\right)\Rightarrow g\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{k}{n}\ \ \forall n\in\mathbb{N}^*$

Với $x=\frac{m}{n}\in\mathbb{Q}^+$, ta có: $g(x)=g\left(\frac{m}{n}\right)=g\left(m.\frac{1}{n}\right)=mg\left(\frac{1}{n}\right)=m.\frac{k}{n}=kx$. Hơn nữa

$g(0)=g(x)+g(-x)\Rightarrow g(-x)=-g(x)$. Do đó: $g(x)=kx\ \forall x\in\mathbb{Q}$. Suy ra: $f(x)=x^2+kx$.

26. Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn: $f\left(\frac{x+y}{3}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}\ \ \forall x,y\in\mathbb{Z}$ và $x+y$ chia hết cho 3.

HD:

Với mọi $n\in\mathbb{Z}$ ta có: $f(n)=f\left(\frac{0+3n}{3}\right)=\frac{f(0)+f(3n)}{2}\Rightarrow 2f(n)=f(0)+f(3n)$ (*)

Và $f(n)=f\left(\frac{n+2n}{3}\right)=\frac{f(n)+f(2n)}{3}\Rightarrow f(n)=f(2n)$.

Lại có: $f(n)=f(2n)=f\left(\frac{3n+3n}{3}\right)=\frac{f(3n)+f(3n)}{2}=f(3n)$.

Vậy $f(n)=f(2n)=f(3n)$. Do đó để ý đến (*) ta có: $f(n)=f(0)$. Suy ra f là hàm hằng.

27. Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ thỏa mãn điều kiện: $3f(n)-2f(f(n))=n\ \ \forall n\in\mathbb{N}$.

HD:

Giả sử f là hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Đặt: $g(n)=f(n)-n$.

Khi đó: $2g(f(n))=g(n)\ \forall n\in\mathbb{N}$ (*)

Áp dụng liên tiếp hệ thức (*) ta suy ra: $g(n)=2g(f(n))=2^2g(f(f(n)))=...=2^m\underbrace{g(f(f(...f(n)...)))}_{m}$

Như vậy $g(n)$ luôn chia hết cho 2^m $\forall m\in\mathbb{N}$. Điều này chỉ có thể xảy ra khi $g(n)=0$ hay $f(n)=n$.

28. Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ thỏa mãn điều kiện: $f(x^3+f(y))=y+f^3(x)$ $\forall x,y\in\mathbb{Z}$.

HD:

- Chứng minh f là một đơn ánh?

- Thay y bởi $-f^3(x)$ thì ta có $f(x^3+y)=0$, nghĩa là tồn tại số a sao cho $f(a)=0$.

Đặt $f(0)=b$. Tìm cách chứng minh $f(0)=0$?

- Thay $y=0$ vào điều kiện bài toán ta được: $f(x^3)=f^3(x)$ $\forall x\in\mathbb{Z}$.

Từ đó $f(1)=f^3(1)\Rightarrow f(1)=0$ hoặc $f(1)=\pm1$.

Nhưng do f là đơn ánh và $f(0)=0$ nên chỉ xảy ra hai khả năng:

a) TH: $f(1)=1$.

Thay $x=1$ và y bởi $f(y)$ thì ta được:

$$f(1+f(f(y)))=f(y)+f^3(1)\Rightarrow f(y+1)=f(y)+1 \text{ hay } f(x+1)=f(x)+1\ \forall x\in\mathbb{Z}.$$

Bằng quy nạp, ta dễ dàng chứng minh được: $f(x)=x$ $\forall x\in\mathbb{Z}$.

b) TH: $f(1)=-1$. Dễ dàng chứng minh $f(x)=-x$ $\forall x\in\mathbb{Z}$.

29. Cho hàm số $f:\mathbb{Q}^+\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện: $|f(x+y)-f(x)|\le\frac{y}{x}$ $\forall x,y\in\mathbb{Q}^+$.

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ta có: $\sum_{i=1}^{n}|f(2^n)-f(2^i)|\le\frac{n(n-1)}{2}$.

HD:

Cho $x=y=2^i$ $\forall i\in\mathbb{N}$ ta có: $|f(2^i+2^i)-f(2^i)|\le\frac{2^i}{2^i}\Rightarrow|f(2^{i+1})-f(2^i)|\le1$.

Do đó: $|f(2^n)-f(2^i)|=|f(2^n)-f(2^{n-1})+f(2^{n-1})-f(2^{n-2})+...+f(2^{i+1})-f(2^i)|$

$$\le|f(2^n)-f(2^{n-1})|+|f(2^{n-1})-f(2^{n-2})|+...+|f(2^{i+1})-f(2^i)|\le n-i.$$

Vì thế $\sum_{i=1}^{n}|f(2^n)-f(2^i)|\le\sum_{i=1}^{n}(n-i)=\sum_{i=1}^{n-1}i=\frac{n(n-1)}{2}$.

30. Cho hàm số $f(n)$ xác định trên tập hợp các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ thỏa mãn các điều kiện:

(i) $f(p)=1$ nếu p nguyên tố.

(ii) $f(mn)=mf(n)+nf(m)\quad \forall m,n\in\mathbb{N}^*$

Hãy tìm giá trị n sao cho $f(n)=n$.

HD:

Ta xét hàm f xác định như sau:

Với p nguyên tố thì $f\left(p^k\right)=kp^{k-1}$.

Với $n=p_1^{m_1}p_2^{m_2}...p_k^{m_k}$ thì đặt $f(n)=\sum_{i=1}^{k}\frac{m_i n}{p_i}$.

Dễ kiểm tra hàm số trên thỏa mãn các điều kiện (i) và (ii). Hơn nữa đó là hàm duy nhất thỏa mãn đề bài.

Ta thấy $f(n)=n\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{k}\frac{m_i}{p_i}=1$. Từ đó xác định được n có dạng $n=p^n$ với p là số nguyên tố.

31. Chứng minh rằng tồn tại vô số các hàm số $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ thỏa mãn các điều kiện:

(i) $f(f(n))=n\quad\forall n\in\mathbb{N}^*$ (ii) $f(n)\neq n\quad\forall n\in\mathbb{N}^*$.

HD:

- Dễ chứng minh f là một đơn ánh?

- Giả sử $f(m)=n$, khi đó $f(n)=f(f(m))=m$, từ (ii) ta phải có $m\neq n$.

- Hàm f được xây dựng như sau: chia tập hợp các số tự nhiên được phân thành hai tập vô hạn

$$S=\{m_1,m_2,...\}\quad;\quad T=\{n_1,n_2,...,\}$$

và đặt $f(m_k)=n_k$ và $f(n_k)=m_k$. Hiển nhiên có vô hạn hàm f được xây dựng như cách trên.

32. Hãy tìm tất cả các hàm tăng thực sự $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ thỏa mãn: $f(mf(n))=nf(2m)\quad\forall m,n\in\mathbb{N}^*$.

HD:

- Chứng minh f là đơn ánh?

- Thay $m=n=1$ vào phương trình trên ta được $f(f(1))=f(2)$.

- Vì f đơn ánh nên $f(1)=2$.

- Từ đây cho phép ta dự đoán $f(n)=2n$.

- Thay $m=1$ ta được $f(f(n))=nf(2)\quad\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Khi đó $f(f(f(n)))=f(nf(2))\Rightarrow f(n)f(2)=2f(2n)$.

Ta chứng minh $f(n)=2n\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Giả sử có n mà $f(n)>2n$. Do f tăng thực sự và sử dụng $f(n)f(2)=2f(2n)$ ta có:

$f(f(n))>f(2n)\Rightarrow nf(2)>f(2n)\Rightarrow 2nf(2)>2f(2n)=f(n)f(2)\Rightarrow f(n)<2n$ mâu thuẫn.

Giả sử có n mà $f(n)<2n$. Khi đó $f(f(n))<f(2n)\Rightarrow 2nf(2)<2f(2n)=f(n)f(2)\Rightarrow f(n)>2n$, vô lý

Vậy $f(n)=2n\ \ \forall n\in\mathbb{N}^*$. Thử lại thấy đúng.

33. Cho hàm $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$. Giả sử với mọi n ta có: $f(f(n))<f(n+1)$. Chứng minh $f(n)=n\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

HD:

Gọi a là số nhỏ nhất của tập hợp $\{f(f(1)), f(2), f(f(2)), f(3),..., f(f(n-1)), f(n), f(f(n)), f(n+1),...\}$.

Khi đó a phải có dạng $f(f(n))$ và suy ra $f(n)=1$.

Tiếp theo chứng minh $f(1)=1$ và $f(n)>1$ khi $n>1$.

Bằng quy nạp chứng minh $f(k)=k$ và $f(n)>k$ khi $n>k$. Từ đó dẫn đến kết luận bài toán.

34. Tồn tại hay không một hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x+f(y))\ge x+yf(x)$ với mọi $x,y\in\mathbb{R}$?

HD:

Có. Ví dụ chọn $f(x)=e^x$

Bất phương trình này tương đương với

$$e^{x+e^y}\ge x+ye^x\ \Leftrightarrow e^x\left(e^{e^y}-y\right)\ge x\Leftrightarrow e^{e^y}-y\ge xe^{-x}$$

Điều này là đúng vì $e^{e^y}-y\ge e^y+1-y\ge y+1+1-y=2,\forall y$.

$xe^{-x}\le\dfrac{1}{e}<2,\forall x$

Hàm này có một cực điểm nhỏ nhất tại $\dfrac{1}{e}$ khi $x=1$ (global minimum)

35. Cho T là một số chẵn: Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ sao cho

$$f(f(n))=n+T \text{ và } f(n+1)>f(n)$$

HD:

Từ đề bài ta có $f(n+T)=f(n)+T$ và $f(x)>T,\forall x>T$

Với bất kì số nguyên $>T$ thuộc $f(\mathbb{N})$, từ điều kiện $f(n+1)>f(n)$ suy ra $f(n+1)=f(n)+1,\ \forall n>T$ (trái lại thì số $f(n)+1\notin f(\mathbb{N})$)

Vậy $f(n)=n+a,\forall n>T$ và $a=\dfrac{T}{2}$

Vậy $f(n+T)=n+T+\dfrac{T}{2}$ từ $n+T>T$

Nhưng $f(n+T)=f(n)+T$.

Vậy $f(n)=n+\dfrac{T}{2},\forall n\in\mathbb{N}$.

36. Đưa ra một ví dụ về hàm $f:[0;1]\to[0;1]$ đơn ánh và không liên tục ở bất cứ điểm nào.

HD:

$\forall x\in[0,1]$:

$f(x)=x$ nếu $x\in\mathbb{Q}$

$f(x)=\left\{x+\dfrac{1}{2}\right\}$ nếu $x\notin\mathbb{Q}$

Ta có thể tìm bất kì một lân cận nào đó thuộc $[0,1]$ các giá trị a,b sao cho $|f(a)-f(b)|>\dfrac{1}{4}$.

37. Xác định tất cả các hàm $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ sao cho $3f(f(x))-8f(x)+4x=0$.

HD:

Ta có $f(f(x))=\dfrac{8}{3}f(x)-\dfrac{4}{3}x,\forall x\in\mathbb{Z}$. Thay x bằng $f^{[n]}(x)$

Vậy $f^{[n+2]}(x)=\dfrac{8}{3}f^{[n+1]}(x)-\dfrac{4}{3}f^{[n]}(x)$ và như vậy

$$f^{[n]}(x)=\frac{3f(x)-2x}{4}2^n+\frac{6x-3f(x)}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Từ $f^{[n]}(x)\in\mathbb{Z}$, ta được $6x-3f(x)=0$ nên $f(x)=2x$ là hàm cần tìm.

38. Giả sử $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ là một hàm tăng sao cho

$$f(x+y)+f(f(x)+f(y))=f(f(x+f(y))+f(y+f(x))),\quad \forall x,y\in\mathbb{R}^+.$$

Chứng minh rằng $f(x)=f^{-1}(x)$.

HD: $f(x)$ là hàm tăng nên ta có thể xác định được hai hàm dương tăng

$h(x)\ge f(x)\ge g(x)$: $g(x)=\lim\limits_{z\to x^+}f(z)$ và $h(x)=\lim\limits_{z\to x^-}f(z)$

$f(f(x+f(y))+f(y+f(x)))>f(x+y)$ và vậy thì $f(x+f(y))+f(y+f(x))<x+y$

Cho $x,y\to0^+$ thì từ bất đẳng thức trên chỉ ra rằng $f(x)$ may be as little as we want and so that

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ và vậy thì $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{y\to0^+}f(x+y)=g(x)$

$\lim\limits_{y\to0^+}f(f(x)+f(y))=0$

Và như vậy $\lim\limits_{y\to0^+}(f(x+y)+f(f(x)+f(y)))=g(x)$

$\lim\limits_{y\to0+}f(x+f(y))=0$

$\lim\limits_{y\to0+}f(f(x)+y)=g(f(x))$

Và như vậy $\lim\limits_{y\to0^+}(f(x+f(y))+f(f(x)+y))=g(f(x))$

Và vậy thì $\lim\limits_{y\to0^+}f(f(x+f(y))+f(f(x)+y))$ tồn tại (do vế trái có giới hạn) và do đó

$\in\{g(g(f(x))),h(g(f(x)))\}$

Vậy: $\forall x$, hoặc $g(x)=g(g(f(x)))$, hoặc $g(x)=h(g(f(x)))$ và từ $h(x)\ge g(x),\forall x$ ta thu được từ hai trường hợp này $g(x)\ge g(g(f(x)))$.

Vậy $g(f(x))\ge x,\forall x$ $\quad f(f(x))\ge x,\forall x$

Thay $x\to f(x)$: $f(f(f(f(x))))\ge f(x)$ và vậy (từ tính tăng của hàm số) $f(f(x))\le x$

Do đó $f(f(x))=x,\forall x$.Đ.P.C.M.

CHƯƠNG III: SỐ HỌC

1. Tìm hai số nguyên dương thỏa mãn PT: $x^{2011}+y^{2011}=\left(2013\right)^{2011}$.

HD:

Giả sử x,y là hai số nguyên dương thỏa mãn PT đã cho. Suy ra: $x,y<2013$.

Không mất tính tổng quát, giả sử: $x\ge y$.

Do $2013>x$ nên $2013\ge x+1$ ($x\in\mathbb{Z}^+$)

Suy ra: $2013^{2011}\ge\left(x+1\right)^{2011}=x^{2011}+2011x^{2010}+...+2011x+1\Rightarrow x^{2011}+y^{2011}>x^{2011}+2011.x^{2010}$

$$\Rightarrow y^{2011}>2011.x^{2010}.$$

Do $x\ge y$ nên $\begin{cases}x^{2011}>2011x^{2010}\\ y^{2011}>2011y^{2010}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>2011\\ y>2011\end{cases}$. Như vậy: $2011<x,y<2013\Rightarrow x=y=2012$.

2. Tìm phần nguyên trong biểu diễn thành số thập phân của số:

$$Q=\sqrt{x^2+\sqrt{4x^2+\sqrt{36x^2+10x+3}}}\ ;\ x\in\mathbb{N}^*.$$

HD:

Với $x\in\mathbb{N}^*$ thì:

$\left(4x+1\right)^2<36x^2+10x+3<\left(6x+2\right)^2\Rightarrow 4x+1<\sqrt{36x^2+10x+3}<6x+2$

Cộng $4x^2$ vào mỗi vế của BĐT trên ta có: $\left(2x+1\right)^2<4x^2+\sqrt{36x^2+10x+3}<\left(2x+2\right)^2$

$$\Rightarrow 2x+1<\sqrt{4x^2+\sqrt{36x^2+10x+3}}<2x+2.$$

Cộng thêm x^2 vào mỗi vế của BĐT ta có: $\left(x+1\right)^2<x^2+\sqrt{4x^2+\sqrt{36x^2+10x+3}}<\left(x+2\right)^2$

$$\Rightarrow x+1<\sqrt{x^2+\sqrt{4x^2+\sqrt{36x^2+10x+3}}}<x+2.$$

Vậy $\left[Q\right]=x+1$.

3. Chứng minh rằng nếu $x,y,x\in\mathbb{N}$ thỏa mãn: $x^{2012}+y^{2012}=z^{2012}$ thì $Min\left\{x,y\right\}\ge 2012$.

HD:

Không mất tính tổng quát, giả sử $x\le y$ thỏa mãn PT :

$$x^{2012}+y^{2012}=z^{2012}\Rightarrow z^{2012}>y^{2012}\Rightarrow z>y\Rightarrow z\ge y+1$$

$$\Rightarrow z^{2012}\ge\left(y+1\right)^{2012}=y^{2012}+2012y^{2011}+...+1\ge y^{2012}+2012y^{2011}$$

$$\Rightarrow x^{2012}+y^{2012}\ge y^{2012}+2012y^{2011}\Rightarrow x^{2012}\ge 2012y^{2011}\ge 2012y^{2011}\text{ (vì } x\le y\text{)}$$

$\Rightarrow x \geq 2012$.

Vậy $Min\{x, y\} = x \geq 2012$.

4. Số $a = 1^k + 9^k + 19^k + 2013^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ có phải là số chính phương không?

HD:

Với $k \in \mathbb{Z}$ và k lẻ ta có:

$1^k \equiv 1(mod4)$; $9^k \equiv 1(\bmod 4)$; $19^k \equiv -1(\bmod 4)$; $2013^k \equiv 1(\bmod 4)$.

Do đó: $a \equiv 2(\bmod 4)$. Vậy a không phải là số chính phương.

5. Chứng minh rằng nếu $x^2 + 2y$ là một số chính phương với $x, y \in \mathbb{Z}^+$ thì $x^2 + y$ là tổng của hai số chính phương.

HD:

Ta có: $x^2 + 2y > x$.

Giả thiết$\Rightarrow x^2 + 2y = (x+t)^2$ với $t \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow 2y = t^2 + 2tx \Rightarrow t$ chẵn$\Rightarrow t = 2k,\ k \in \mathbb{Z}^+$.

Do đó: $2y = 4k^2 + 4kx \Rightarrow y = 2k^2 + 2kx \Rightarrow x^2 + y = (x+k)^2 + 2kx$ (đpcm).

6. Tìm số nguyên tố p sao cho $2p+1$ là lập phương của một số tự nhiên.

HD:

Rõ ràng: $p \neq 2 \Rightarrow p \geq 3$.

Giả sử $ap + 1 = t^3$; $t \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow 2p = t^3 - 1 \Leftrightarrow 2p = (t-1)(t^2 + t + 1)$.

Vì $(t^2 + t + 1, 2) = 1$ nên $t - 1 \vdots 2$.

Mặt khác do p là số nguyên tố nên $t - 1 = 2 \Leftrightarrow t = 3 \Rightarrow p = 13$.

7. Chứng minh rằng có vô số số tự nhiên a sao cho $b = n^4 + a$ không phải là số nguyên tố với mọi $n \in \mathbb{N}$.

HD:

Xét số $a = 4k^4, k \in \mathbb{N}$ và $k > 1$. Ta có:

$b = n^4 + 4k^4 = (n^2 - 2nk + 2k^2)(n^2 + 2nk + 2k^2)$.

với $n^2 - 2nk + 2k^2 = (n-k)^2 + k^2 > 1$; $n^2 + 2nk + 2k^2 = (n+k)^2 + k^2 > 1$

Vậy b không phải là số nguyên tố.

8. Cho p là số nguyên tố bất kỳ khác 2 và khác 5. Chứng minh rằng trong dãy $9, 99, 999, 9999, \ldots$ có vô số số hạng chia hết cho p.

HD:

Do p là số nguyên tố khác 2 và khác 5 nên $(p,10)=1$ (1)

Vì p là số nguyên tố nên theo định lý Fermat nhỏ, ta có: $\left(10^p-10\right)\,\vdots\, p \Rightarrow 10\left(10^{p-1}-1\right)\,\vdots\, p$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $10^{p-1}-1\,\vdots\, p \Rightarrow 10^{p-1}\equiv 1\pmod p$.

Do đó, với mọi n nguyên dương thì $10^{n(p-1)}\equiv 1\pmod p \Rightarrow 10^{n(p-1)}-1\,\vdots\, p$ với n nguyên dương.

Mặt khác, $10^{n(p-1)}-1=\underbrace{99...9}_{n(p-1)}$. Từ đó suy ra tồn tại vô số số hạng của dãy $9,99,999,9999,...$ chia hết cho p.

9. Cho p là số nguyên tố lẻ. Chứng minh: $\sum_{k=0}^{p} C_p^k C_{p+k}^k-\left(2^p+1\right)$ chia hết cho p^2.

HD:

Ta có: $T=\sum_{k=0}^{p} C_p^k C_{p+k}^k-\left(2^p+1\right)=\sum_{k=0}^{p} C_p^k C_{p+k}^k-\left(\sum_{k=0}^{p} C_p^k+1\right)$

$$=\sum_{k=1}^{p-1} C_p^k C_{p+k}^k+1+C_{2p}^p-\left(\sum_{k=0}^{p-1} C_p^k+3\right)=\sum_{k=1}^{p-1} C_p^k\left(C_{p+k}^k-1\right)+\left(C_{2p}^p-2\right)$$

- Chứng minh: $\sum_{k=1}^{p-1} C_p^k\left(C_{p+k}^k-1\right)\,\vdots\, p$ với $1\le k\le p-1$ (vì $C_p^k\,\vdots\, p$).

Thật vậy: $C_{p+k}^k-1=\dfrac{(p+k)!}{k!.p!}-1=\dfrac{(p+1)(p+2)...(p+k)-k!}{k!}$.

Vì $(p+1)(p+2)...(p+k)\equiv k!\pmod p \Rightarrow (p+1)(p+2)...(p+k)-k!$ chia hết cho p và $k!$.

Mà $(p,k!)=1$ suy ra: $(p+1)(p+2)...(p+k)-k!$ chia hết cho $k!p \Rightarrow \left(C_{p+k}^k-1\right)\,\vdots\, p \Rightarrow \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k\left(C_{p+k}^k-1\right)\,\vdots\, p^2$

(1)

- Chứng minh: $\left(C_{2p}^p-2\right)\,\vdots\, p^2$

Thật vậy: $(1+x)^{2p}=(1+x)^p(1+x)^p \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{2p} C_{2p}^k x^k=\left(\sum_{i=0}^{p} C_p^i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{p} C_p^j x^{p-j}\right)$.

Đồng nhất hệ số của x^p hai vế ta được: $C_{2p}^p=\sum_{k=0}^{p}\left(C_p^k\right)^2 \Leftrightarrow C_{2p}^p=2+\sum_{k=0}^{p-1}\left(C_p^k\right)^2$.

$C_p^k\,\vdots\, p \Rightarrow \left(C_p^k\right)^2\,\vdots\, p^2$ với mọi $1\le k\le p-1 \Rightarrow C_{2p}^p\equiv 2\pmod{p^2} \Rightarrow \left(C_{2p}^p-2\right)\,\vdots\, p^2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $T\,\vdots\, p^2$.

10. Giải PT nghiệm nguyên: $x_1^4+x_2^4+...+x_{14}^4=1599$ với $x_1,x_2,...,x_{14}\in\mathbb{Z}$

HD:

Xét n là một số nguyên tùy ý.

- Nếu $n = 2k,\ k \in \mathbb{Z}$ thì $n^4 = 16k^4 \equiv 0\left(\text{mod}16\right)$.

- Nếu $n = 2k+1,\ k \in \mathbb{Z}$ thì $n^2 - 1 = 4k\left(k+1\right) \vdots 8 \Rightarrow n^4 - 1 \vdots 16 \Leftrightarrow n^4 \equiv 1\left(\text{mod}16\right)$.

Do đó: $x_1^4 + x_2^4 + ... + x_{14}^4 \equiv r\left(\text{mod}16\right)$.

Với $r \in \mathbb{N}$ và $r \le 14$.

Mặt khác, ta có: $1599 \equiv 15\left(\text{mod}16\right)$.

Do đó : PT đã cho không thể có nghiệm nguyên.

11. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n, phân số sau đây tối giản: $\dfrac{21n+4}{14n+3}$.

HD:

Gọi $d = \left(21n+4;14n+3\right)$.

Ta có: $21n+4 = kd$; $14n+3 = hd$ với $k,h \in \mathbb{Z}^+$. Suy ra: $7n+1 = \left(k-h\right)d$.

Do đó: $21n+3 = 3\left(k-h\right)d$.

Vì vậy: $1 = \left(21n+4\right) - \left(21n+3\right) = kd - 3\left(k-h\right)d = \left(3h-2k\right)d \Rightarrow d = 3h-2k = 1$.

Vậy phân số đã cho tối giản.

12. Chứng minh $B = \dfrac{1}{630}x^9 - \dfrac{1}{21}x^7 + \dfrac{13}{30}x^5 - \dfrac{82}{63}x^3 + \dfrac{32}{35}x$ nhận giá trị nguyên với mọi giá trị nguyên của x.

HD:

Xét $A = x\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)\left(x^2-9\right)\left(x^2-16\right)$

$= \left(x-4\right)\left(x-3\right)\left(x-2\right)\left(x-1\right)x\left(x+1\right)\left(x+2\right)\left(x+3\right)\left(x+4\right)$.

Còn $B = \dfrac{A}{630} = \dfrac{A}{2.5.7.9}$.

13. Chứng minh rằng với mọi số nguyên a,b ta có: $\left(3a+5b, 8a+13b\right) = \left(a,b\right)$.

HD:

Ta có: $8a+13b = 2\left(3a+5b\right) + \left(2a+3b\right)$; $3a+5b = 1\left(2a+3b\right) + \left(a+2b\right)$; $2a+3b = 2\left(a+2b\right) - b$.

Vậy $\left(8a+13b, 3a+5b\right) = \left(3a+5b, 2a+3b\right) = \left(2a+2b, a+2b\right) = \left(a+2b, b\right) = \left(a,b\right)$.

14. Cho đa thức $P(x)$ với hệ số nguyên, biết rằng tồn tại số nguyên dương a sao cho không có số nào trong các số $P(1), P(2), ..., P(a)$ chia hết cho a. Chứng minh rằng với mọi số nguyên z ta có $P(z) \neq 0$.

HD:

Giả sử tồn tại số nguyên b sao cho $P(b) = 0$. Khi đó ta có: $P(x) = (x-b)Q(x)$ với $Q(x)$ là đa thức có hệ số nguyên. Đặt $b = aq + r$, $1 \le r < a$. Ta cos: $P(r) = (r-b)Q(r) = -aQ(r) \vdots a$ (mâu thuẫn gt)

15. Chứng minh rằng các số $2^p - 1$ và $2^q - 1$ là nguyên tố cùng nhau khi và chỉ khi p và q nguyên tố cùng nhau.

HD:

ĐK cần: Giả sử $(2^p - 1, 2^q - 1) = 1$ và $k = (p, q)$. Đặt $p = ku, q = kv$.

Khi đó: $2^p - 1 = (2^k)^u - 1 \vdots 2^k - 1$. Tương tự: $2^q - 1 \vdots 2^k - 1$.

Như vậy $2^k - 1$ là một ước chung của $2^p - 1$ và $2^q - 1$. Kết hợp với giả thiết suy ra: $2^k - 1 = 1 \Leftrightarrow k = 1$.
Vậy p và q nguyên tố cùng nhau.

ĐK đủ: Giả sử $(p, q) = 1$. Khi đó tồn tại các số nguyên s, t sao cho $ps + qt = 1$. Gọi $d = (2^p - 1, 2^q - 1)$.

- Xét TH: $s > 0$. Khi đó $t < 0$. Đặt $v = -t > 0$. Suy ra: $ps - qv = 1$. Ta có: $2^{ps} - 1 \vdots 2^p - 1 \Rightarrow 2^{ps} - 1 \vdots d$.

Tương tự: $2^{qv} - 1 \vdots d$. Từ đó suy ra: $(2^{ps} - 1) - (2^{qv} - 1) \vdots d$ hay $2^{qv}(2^{ps-qv} - 1) \vdots d$. Kết hợp với đẳng thức $ps - qv = 1$ suy ra: $2^{qv} \vdots d$.

Mặt khác do $2^p - 1$ là một số lẻ nên d lẻ. Từ đó suy ra: $d = 1$.
- Xét TH: $s < 0$, $t > 0$ ta làm tương tự.
Tóm lại: $(2^p - 1, 2^q - 1) = 1$.

16. Cho a, b là hai số nguyên sao cho $(a, b) = 1$. Tìm $(5^a + 7^a, 5^b + 7^b)$.

HD:

Không mất tính tổng quát, giả sử $a > b$. Đặt $s_a = 5^a + 7^a$.

Nếu $a \ge 2b$ ta có: $s_a = s_a s_{a-b} - 5^b 7^b s_{a-2b}$. Do đó: $(s_a, s_b) = (s_b, s_{a-2b})$.

Tương tự nếu $b < a < 2b$ thì ta có: $(s_a, s_b) = (s_b, s_{2b-a})$.

Vậy từ thuật toán Euclid suy ra nếu $a + b$ là số chẵn thì $(s_a, s_b) = (s_1, s_2) = 12$, còn nếu $a + b$ là số lẻ thì $(s_a, s_b) = (s_0, s_1) = 2$.

17. Tìm $[2^n + 1, 2^n - 1]$ với $n \in \mathbb{N}$.

HD:

- Nếu $n=0$ thì $2^n-1=0$.

- Nếu $n>0$ thì $2^n+1=\left(2^n-1\right)+2$. Do đó: $\left(2^n+1,2^n-1\right)=\left(2^n-1,2\right)=2$.

Suy ra: $\left[2^n+1,2^n-1\right]=\dfrac{\left|\left(2^n+1\right)\left(2^n-1\right)\right|}{\left(2^n+1,2^n-1\right)}=4^n-1$..

18. Cho p và $2p+1$ là hai số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $4p+1$ là một hợp số.

HD:

Do p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p có dạng $p=3k\pm 1$.

- Nếu $p=3k+1$ thì $2p+1=6k+3=3\left(2k+1\right)$ không phải là một số nguyên tố nên trường hợp này không thể xảy ra.

- Nếu $p=3k-1,\ k\geq 2$ thì $4p+1=12k-3=3\left(4k-1\right)$. Do $4k-1\geq 7$ nên $4p+1$ là một hợp số.

19. Tìm số nguyên tố p sao cho hai số $p+4$ và $p+8$ cũng là số nguyên tố.

HD:

- Nếu $p=3$ thì $p+4=7, p+8=11$ đều là những số nguyên tố.

- Nếu $p=3k+1$ thì $p+8=3k+9=3\left(k+3\right)$ là hợp số.

- Nếu $p=3k-1$ thì $p+4=3k+1=3\left(k+1\right)$ là hợp số.

Vậy $p=3$ là số nguyên tố duy nhất phải tìm.

20. Chứng minh rằng với $m>2$, giữa m và $m!$ có ít nhất một số nguyên tố. Từ đó suy ra rằng có vô số số nguyên tố.

HD:

Do $m>2$ nên $m!-1>4$. Gọi p là một ước nguyên tố của $a=m!-1$ ta có: $p\leq a\Rightarrow P<m!$.

Bây giờ chứng tỏ $p>m$. Giả sử ngược lại rằng $p\leq m$. Khi đó: p là ước của $m!$ và do đó p là ước của $m!-\left(m!-1\right)=1$, điều này là vô lý. Vậy p là số nguyên tố thỏa mãn $m<p<m!$.

21. Cho rằng các số tự nhiên a,b và n. Biết rằng k^n-a chia hết cho $k-b$ với mọi $k\in\mathbb{Z}^+, k\neq b$. Chứng minh rằng: $a=b^n$.

HD:

Ta có: $k^n-b^n \vdots k-b$ với $k,b\in\mathbb{Z}$ và $k\neq b$.

Ta lại có: $k^n-a \vdots k-b$. Suy ra: $a-b^n \vdots k-b$ với mọi $b\in\mathbb{Z},\ k\in\mathbb{Z}^+, k\neq b$.

Điều này chỉ có thể xảy ra $\Leftrightarrow a=b^n$.

22. Cho $A=2^n+3^n; B=2^{n+1}+3^{n+1}; C=2^{n+2}+3^{n+2}$.

a) Chứng minh: A và B nguyên tố cùng nhau ; b) Tìm $d=(A,C)$.

HD:

a) Ta có: $B-2A=3^n$.

Nếu A và B có một ước chung $d\neq 1$ thì $d|3^n \Rightarrow d|2^n$ (Vô lý). Do đó A và B nguyên tố cùng nhau.

b) Ta có: $C-4A=5.3^n$. Điều này chứng tỏ ước chung lớn nhất của A và C có thể là 5 hoặc 1.

Muốn cho $(A,C)=5$ thì $5|A \Leftrightarrow n$ lẻ.

Vậy $d=5$ nếu n lẻ ; $d=1$ nếu n chẵn.

23. Có tồn tại một số tự nhiên n có thể viết dưới dạng: $n=x!+y!$ với $x,y\in\mathbb{Z}^+$ và $x\le y$ bằng hai cách khác nhau hay không?

HD:

Giả sử tồn tại một số tự nhiên n có thể viết dưới dạng:

$n=x_1!+x_2!=x_2!+y_2!$ với $x_1,y_1,x_2,y_2\in\mathbb{Z}^+$ và $x_1\le y_1, x_2\le y_2$.

Không mất tính tổng quát, giả sử $0<x_1<x_2 \Rightarrow y_1\ge x_2$. Do đó: $x_2!+y_2!-y_1!\vdots x_2! \Rightarrow x_1!\vdots x_2!$ Vô lý.

24. Tìm nghiệm nguyên dương của PT: $x_1^{2012}+x_2^{2012}+...+x_{2012}^{2012}=2011x_1x_2...x_{2012}$

HD:

Ta có: $x_1^{2012}+x_2^{2012}+...+x_{2012}^{2012}\ge 2012x_1x_2...x_{2012}>2011x_1x_2...x_{2012}$ Vô lý.

25. Chứng minh rằng nếu có 6 số nguyên a,b,c,d,e,f thỏa mãn điều kiện: $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=f^2$ thì cả 6 số đó không đồng thời là số lẻ.

HD: (Dễ dàng chứng minh được bình phương của một số nguyên lẻ chia cho 8 dư 1

Giả sử cả 6 số đó đều là số lẻ. Thế thì mỗi số hạng ở vế trái khi chia cho 8 đều dư 1. Như vậy cả vế trái chia cho 8 dư 5. Trong khi đó vế phải là số chia cho 8 dư 1. Điều này mâu thuẫn.

26. Cho số nguyên tố $p>3$ và m, n là hai số nguyên tố cùng nhau sao cho $\frac{m}{n}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{(p-1)^2}$.

Chứng minh rằng m chia hết cho p.

HD:

Ta có: $((p-1)!)^2\frac{m}{n}=((p-1)!)^2\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{(p-1)^2}\right)$ là một số nguyên.

Mặt khác do p là số nguyên tố nên $\left\{0,\frac{1}{1},\frac{1}{2},...,\frac{1}{p-1}\right\}$ là một hệ thặng dư đầy đủ theo mod p.

Do đó: $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{(p-1)^2}\equiv 1^2+2^2+...+(p-1)^2=\frac{(p-1)p(2p-3)}{6}\equiv 0 \pmod p$ (do $p\geq 5$ nên $(p,6)=1$). Suy ra: $((p-1)!)^2\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{(p-1)^2}\right)\equiv 0$ (mod p) hay $((p-1)!)^2\frac{m}{n}\vdots p$.

Mà $(p-1,p)=1$ nên m chia hết cho p.

27. Cho số nguyên $n\geq 3$. Lấy n số $x_1,x_2,...,x_n$ và mỗi số x_i bằng 1 hoặc -1 sao cho:

$x_1x_2+x_2x_3+...+x_{n-1}x_n+x_nx_1=0$. Hãy chứng minh rằng n phải là bội số của 4.

HD:

Đặt: $X_1=x_1x_2, X_2=x_2x_3,...,X_n=x_nx_1$.

Mỗi số X_i bằng 1 hoặc -1, và $X_1+X_2+...+X_n=0$.

Như vậy nếu có p số X_i bằng 1 thì phải có p số X_j bằng -1. Suy ra: $n=2p$.

Mặt khác: $X_1X_2...X_n=(x_1x_2...x_n)^2=1$

Mà $X_1X_2...X_n=(-1)^p$. Vậy p chẵn và $n=2p$ là một bội số của 4.

28. Chứng tỏ rằng số $444444+303030\sqrt{3}$ không thể biểu diễn dưới dạng $(x+y\sqrt{3})^2$ với $x,y\in\mathbb{Z}$.

HD:

Nếu $(A+B\sqrt{3})^2=C+D\sqrt{3}$ thì $C=A^2+3B^2, D=2AB$. Suy ra: $(A-B\sqrt{3})^2=C-D\sqrt{3}$.

Do đó nếu $(x+y\sqrt{3})^2=444444+303030\sqrt{3}$ thì cũng có $(x-y\sqrt{3})^2=444444-303030\sqrt{3}<0$ vô lý.

29. Chứng minh rằng đa thức: $P(x)=x^{9999}+x^{8888}+x^{7777}+x^{6666}+x^{4444}+x^{3333}+x^{2222}+x^{1111}+1$ chia hết cho đa thức: $Q(x)=x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$.

HD:

Ta có: $P(x)-Q(x)=(x^{9999}-x^9)+(x^{8888}-x^8)+...+(x^{1111}-x)$

$$=x^9\left((x^{10})^{999}-1\right)+x^8\left((x^{10})^{888}-1\right)+...+\left((x^{10})^{111}-1\right).$$

$\Rightarrow P(x)-Q(x)\vdots x^{10}-1$ và do đó: $P(x)-Q(x)\vdots Q(x)=\frac{x^{10}-1}{x-1}\Rightarrow P(x)\vdots Q(x)$.

30. Cho p là một số nguyên tố thỏa mãn $p \equiv 1 \pmod 6$ và đặt $q = \left[\frac{2p}{3}\right]$.

Chứng minh nếu $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{(q-1).q} = \frac{m}{n}$; $m, n \in \mathbb{Z}$ thì $p | m$.

HD:

Ta có: $p \equiv 1 \pmod 6$**.** Đặt $p = 6k+1$, suy ra: $q = \left[\frac{2p}{3}\right] = 4k$.

Khi đó $\frac{m}{n} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{(4k-1).4k} = \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} + ... + \frac{1}{4k}$

$$= \left(\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{4k}\right) + \left(\frac{1}{2k+2} + \frac{1}{4k-1}\right) + ... + \left(\frac{1}{3k} + \frac{1}{3k+1}\right)$$

$$= \frac{p}{(2k+1)4k} + \frac{p}{(2k+2)(4k-1)} + ... + \frac{p}{3k(3k+1)}.$$

Suy ra: $p | m$.

31. Tìm nghiệm nguyên của PT: $x^2 + 2011x + 2012y^2 + y = xy + 2011xy^2 + 2013$.

HD:

PT $\Leftrightarrow (x^2 + 2011x - 2012) + (2012y^2 - 2012xy^2) + (y - xy) = 1 \Leftrightarrow (x-1)(x + 2012 - 2012y^2 - y) = 1$.

Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên hai thừa số trong vế trái của PT này đều là ước số của 1.

32. Cho n là số tự nhiên, a là ước nguyên dương của $2n^2$. Chứng minh $n^2 + a$ không là số chính phương.

HD:

Giả sử $n^2 + a = x^2$ (1) với $x \in \mathbb{Z}$. Theo giả thiết: $2n^2 = ka$ với $k \in \mathbb{N}$.

Ta có: $(1) \Leftrightarrow x^2 = n^2 + \frac{2n^2}{k} \Leftrightarrow \left(\frac{kx}{n^2}\right)^2 = k^2 + 2k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{kx}{n} \in \mathbb{Z}$.

Vì vậy $k^2 + 2k$ phải là số chính phương (Vô lý vì $k^2 < k^2 + 2k < (k+1)^2$).

33. Chứng minh rằng số: $222^{555} + 555^{222}$ chia hết cho 7.

HD:

Ta có: $222 = 7.31 + 5 \Rightarrow 222 \equiv 5 \pmod 7 \Rightarrow 222^{555} \equiv 5^{555} \pmod 7$.

Mặt khác: $5^2 = 25 \equiv 4 \pmod 7$

$5^3 \equiv 4.5 \pmod 7 \equiv 6 \pmod 7$

$5^4 \equiv 6.5 \pmod 7 \equiv 2 \pmod 7$

$$5^5 \equiv 2.5 \pmod 7 \equiv 3 \pmod 7$$

$$5^6 \equiv 3.5 \pmod 7 \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow 5^{6k} \equiv 1 \pmod 7.$$

Mà $555 = 6.92 + 3 \Rightarrow 5^{555} \equiv 5^3 \pmod 7 \equiv 6 \pmod 7$. Tức là: $222^{555} \equiv 6 \pmod 7$.

Lập luận tương tự, ta có: $555 = 7.79 + 2 \equiv 2 \pmod 7 \Rightarrow 555^{222} \equiv 2^{222} \pmod 7$.

$$2^3 \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow 2^{3k} \equiv 1 \pmod 7.$$

Mà $222 = 3.74 \Rightarrow 2^{222} \equiv 1 \pmod 7$. Tức $555^{222} \equiv 1 \pmod 7$.

Vậy $222^{555} + 555^{222} \equiv 7 \pmod 7 \equiv 0 \pmod 7$ tức là: $222^{555} + 555^{222}$ chia hết cho 7.

34. Tìm bộ số nguyên dương $(m;n)$ sao cho $p = m^2 + n^2$ là số nguyên tố và $m^3 + n^3 - 4$ chia hết cho p

HD:

Ta có: $m^3 + n^3 - 4 \equiv 0 \pmod p \Leftrightarrow -mn(m+n) - 4 \equiv 0 \pmod p \Leftrightarrow 3mn(m+n) + 12 \equiv 0 \pmod p$.

Kết hợp với $m^3 + n^3 - 4 \equiv 0 \pmod p$ suy ra:

$(m+n)^3 + 8 \equiv 0 \pmod p \Leftrightarrow (m+n+2)\left[m^2 + n^2 + 2nm - 2(m+n) + 4\right] \equiv 0 \pmod p$.

Do p là số nguyên tố nên ta có 2 khả năng:

- TH1: Nếu $m+n+2 \vdots (m^2+n^2)$ thì $m^2 + n^2 \le m + n + 2 \Leftrightarrow m(m-1) + n(n-1) \le 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = n = 1 \\ m = 2, n = 1 \\ m = 1, n = 2 \end{array}\right.$.

Thử lại ta thấy: bộ số (m,n) là $(1;1),(2;1),(1;2)$ thỏa bài toán.

- TH2: Nếu $m^2 + n^2 + 2nm - 2(m+n) + 4 \vdots (m^2+n^2) \Rightarrow 2nm - 2(m+n) + 4 \vdots (m^2+n^2)$.

Do $2nm - 2(m+n) + 4 = 2\left[(m-1)(n-1) + 1\right] > 0 \Rightarrow 2nm - 2(m+n) + 4 \ge m^2 + n^2$

(chỉ xảy ra khi $m = n = 1$).

35. Tìm tất cả các số nguyên tố a, b, c sao cho: $abc < ab + bc + ca$.

HD:

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \le b \le c$. Suy ra: $ab + bc + ca \le 3bc$.

Nếu $a \ge$ thì $3bc \le abc \Rightarrow ab + bc + ca \le abc$ mâu thuẩn với bài ra. Vậy $a = 2$ (vì a nguyên tố).

Do đó: $2bc < 2b + bc + 2c \Rightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > \frac{1}{2} \Rightarrow b < 5$.

- Với $b = 2 \Rightarrow c$ nguyên tố bất kì.

- Với $b=3\Rightarrow c=3$ hoặc $c=5$.

Vậy nghiệm của bài toán là: $a=2,b=2,c=p$ nguyên tố và các hoán vị, hoặc $a=2,b=3,c=3$ và các hoán vị.

36. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n\ge 2$ ta có: $\sum_{k=0}^{n-1} C_{2n+1}^{2(n-k)}.C_{n-k}^{1}$ chia hết cho 4^{n-1}.

HD:

Ta có: $\sum_{k=0}^{n-1} C_{2n+1}^{2(n-k)}.C_{n-k}^{1}=\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)C_{2n+1}^{2k}=\sum_{k=0}^{n} kC_{2n+1}^{2k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k.(2n+1)!}{2.(2k)!(2n-2k+1)!}=\frac{2n+1}{2}\sum_{k=1}^{n}C_{2n}^{2k-1}$.

Mặt khác $4^n=(1+1)^{2n}-(1-1)^{2n}=2\sum_{k=1}^{n}C_{2n}^{2k-1}$.

Như vậy: $\sum_{k=0}^{n-1} C_{2n+1}^{2(n-k)}.C_{n-k}^{1}=(2n+1)4^{n-1}\,\vdots\,4^{n-1}$.

37. Chứng minh rằng: $\sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1}2^{3k}$ không chia hết cho 5 với mọi n là số tự nhiên.

HD:

Ta có: $(1+x)^{2n+1}=\sum_{k=0}^{2n+1}C_{2n+1}^{k}x^k=\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k}x^{2k}+\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k+1}x^{2k+1}$

$(1-x)^{2n+1}=\sum_{k=0}^{2n+1}C_{2n+1}^{k}x^k=\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k}x^{2k}-\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k+1}x^{2k+1}$

Suy ra: $(1+x)^{2n+1}(1-x)^{2n+1}=\left(\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k}x^{2k}\right)^2-\left(\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k+1}x^{2k+1}\right)^2$ (*)

Cho $x=\sqrt{8}$, từ (*) suy ra: $7^{2n+1}=A^2-8B^2$ với $A=\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k}2^{3k}$, $B=\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k+1}2^{3k}$.

Vì $(-7)^{2n+1}\equiv\pm 2\pmod 5$ nên :

- Nếu $B\,\vdots\,5$ thì $A^2\equiv\pm2\pmod 5$ (**)

Tuy nhiên $\forall a\in\mathbb{N}$, $a=5k, a=5k\pm1, a=5k\pm2$. Ta luôn có: $a^2\equiv 0\pmod 5$; $a^2\equiv 1\pmod 5$; $a^2\equiv 4\pmod 5$.

Suy ra: $A^2\ne\pm2\pmod 5$ (***).

Từ (**) và (***) ta có điều mâu thuẫn.

Vậy B không chia hết cho 5.

38. Tính: $\left[\left(45+\sqrt{1999}\right)^{1999}\right]$, trong đó: $[a]$ là ký hiệu phần nguyên của số a.

HD:

Ta có: $\left(45+\sqrt{1999}\right)^{1999}+\left(45-\sqrt{1999}\right)^{1999}=\sum_{k=0}^{1999}C_{1999}^{k}1999^{\frac{k}{2}}.45^{1999-k}+\sum_{k=0}^{1999}C_{1999}^{k}\left(-1\right)^{k}1999^{\frac{k}{2}}.45^{1999-k}$

$=2\sum_{k=0}^{999}C_{1999}^{2k}1999^{k}.45^{1999-2k}=2m$ với $m\in\mathbb{N}^{*}$.

Mà $44<\sqrt{1999}<45\Rightarrow 0<45-\sqrt{1999}<1\Rightarrow 0<\left(45-\sqrt{1999}\right)^{1999}<1$

Nên $\left[\left(45+\sqrt{1999}\right)^{1999}\right]=2m-1$ với $m=\sum_{k=0}^{999}C_{1999}^{2k}1999^{k}.45^{1999-2k}$.

39. Chứng minh rằng: $\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^{n}\right]$ là số lẻ với mọi số tự nhiên n.

HD:

Đặt $\begin{cases}x=2+\sqrt{3}\\ y=2-\sqrt{3}\end{cases}\Rightarrow x,y$ là nghiệm của PT $X^2+4X+1=0$.

Đặt: $S_n=x^n+y^n$.

Ta có: $S_{n+1}=x^{n+1}+y^{n+1}=\left(x+y\right)\left(x^n+y^n\right)-xy\left(x^{n-1}+y^{n-1}\right)=4S_n-S_{n-1}$

Suy ra: $S_{n+1}-4S_n+S_{n-1}=0$.

$S_0=2,S_1=4\Rightarrow S_n\in\mathbb{Z}\ \forall n\in\mathbb{N}$.

Vì $0<2-\sqrt{3}<1$ nên $0<\left(2-\sqrt{3}\right)^{n}<1$.

Do đó: $\left(2+\sqrt{3}\right)^{n}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{n}-1<\left(2+\sqrt{3}\right)^{n}<\left(2+\sqrt{3}\right)^{n}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{n}$.

Suy ra: $\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^{n}\right]=\left(2+\sqrt{3}\right)^{n}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{n}-1$ là số lẻ (vì S_0,S_1 chẵn nên S_n chẵn).

40. Chứng minh rằng biểu thức $A=\left(9+4\sqrt{5}\right)^{n}+\left(9-4\sqrt{5}\right)^{n}$ nhận giá trị nguyên và không chia hết cho 17 với mọi giá trị nguyên của n.

HD:
Làm tương tự như bài **39**

41. Tìm n nguyên dương sao cho: $\left[\sqrt[3]{1}\right]+\left[\sqrt[3]{2}\right]+...+\left[\sqrt[3]{n^3+2n+4}\right]=7225$.

HD:
Với $m\in\mathbb{N}^{*}$, xét $\left[\sqrt[3]{m}\right]=k\Leftrightarrow k\le\left[\sqrt[3]{m}\right]<k+1\Leftrightarrow k^3\le m\le\left(k+1\right)^3-1$.

Suy ra: với mỗi k cho trước, số các số m thỏa: $\left[\sqrt[3]{m}\right]=k$ là: $\left(k+1\right)^3-k^3=3k^2+3k+1$.

Gọi tổng tương ứng của chúng là S_k, ta có: $S_k = k\left(3k^2+3k+1\right) = 3k^3+3k^2+k$.

Do: $\left[\sqrt[3]{n^3-1}\right] = n-1$; $\left[\sqrt[3]{n^3}\right] = \left[\sqrt[3]{n^3+1}\right] = ... = \left[\sqrt[3]{n^3+2n+4}\right] = n$ với $n \geq 2$

Nên $\left[\sqrt[3]{1}\right] + \left[\sqrt[3]{2}\right] + ... + \left[\sqrt[3]{n^3+2n+4}\right] = \sum_{k=1}^{n-1} S_k + (2n+5)n = .. = \dfrac{3n^4-2n^3+7n^2+20n}{4} = 7225$.

Dễ dàng tìm được: $n = 10$.

42. Cho p là số nguyên tố khác 2 và a, b là hai số tự nhiên lẻ sao cho $a+b$ chia hết cho p và $a-b$ chia hết cho $p-1$. Chứng minh rằng: $a^b + b^a$ chia hết cho $2p$.

HD:

Giả sử $a \geq b$.

Gọi r là dư trong phép chia a cho p thì $a \equiv r \pmod{p}$.

Do $a+b \,\vdots\, p$ nên $b \equiv -r \pmod{p}$.

Suy ra: $a^b + b^a \equiv r^b - r^a \pmod{p}$ hay $a^b + b^a \equiv r^b\left(1 - r^{a-b}\right) \pmod{p}$.

Mặt khác: $a - b \,\vdots\, p-1$ nên $a - b = k(p-1)$.

Vì r không chia hết cho p nên theo định lý Fermat nhỏ ta có:

$r^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow r^{k(p-1)} \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow r^{a-b} \equiv 1 \pmod{p}$.

Từ đó suy ra: $a^b + b^a \equiv 0 \pmod{p}$ tức là: $a^b + b^a \,\vdots\, p$.

Ngoài ra a^b, b^a là các số nguyên lẻ nên $a^b + b^a \,\vdots\, 2$.

Vậy $a^b + b^a \,\vdots\, 2p$.

43. Tìm tất cả các số hữu tỉ dương x, y sao cho $x+y$ và $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ là các số nguyên.

HD:

Đặt $\begin{cases} x+y=m \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=m \\ xy=\dfrac{m}{n} \end{cases} \Rightarrow x, y$ là nghiệm của PT: $nX^2 - mnX + m = 0$.

Ta có: $\Delta = mn(mn-4)$

- Nếu $\Delta = 0 \Leftrightarrow mn = 4$. Giải tìm m, n sau đó tìm x, y.

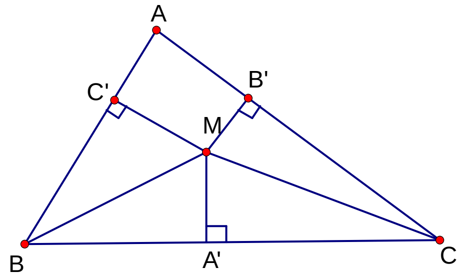
- Nếu $\Delta > 0 \Leftrightarrow mn > 4$. Mà $(mn-3)^2 < \Delta < (mn-2)^2 \Rightarrow \Delta$ không là số chính phương

$\Rightarrow$ Không tồn tại $X_1, X_2 \in \mathbb{Q}$.

CHƯƠNG IV: HÌNH HỌC PHẲNG

1. Giả sử M là điểm nằm trong $\triangle ABC$. Gọi A', B', C' lần lượt là hình chiếu của M trên các đường thẳng BC, CA, AB. Chứng minh rằng: $\left(\dfrac{MA}{MB'+MC'}\right)^2 + \left(\dfrac{MB}{MC'+MA'}\right)^2 + \left(\dfrac{MC}{MA'+MB'}\right)^2 \geq 3$.

Giải



Ta có: $\dfrac{MB'+MC'}{MA}=\dfrac{MB'}{MA}+\dfrac{MC'}{MA}=\sin\widehat{MAB'}+\sin\widehat{MAC'}$

$=2\sin\dfrac{\widehat{MAB'}+\widehat{MAC'}}{2}.\cos\dfrac{\widehat{MAB'}-\widehat{MAC'}}{2}\le 2\sin\dfrac{A}{2}$

Suy ra: $\dfrac{MA}{MB'+MC'}\ge\dfrac{1}{2\sin A}$.

Chứng minh tương tự ta được: $\dfrac{MB}{MC'+MA'}\ge\dfrac{1}{2\sin B}$; $\dfrac{MC}{MA'+MB'}\ge\dfrac{1}{2\sin C}$.

Khi đó: $\left(\dfrac{MA}{MB'+MC'}\right)^2+\left(\dfrac{MB}{MC'+MA'}\right)^2+\left(\dfrac{MC}{MA'+MB'}\right)^2\ge\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{\sin^2\frac{A}{2}}+\dfrac{1}{\sin^2\frac{B}{2}}+\dfrac{1}{\sin^2\frac{C}{2}}\right)$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có: $\dfrac{1}{\sin^2\frac{A}{2}}+\dfrac{1}{\sin^2\frac{B}{2}}+\dfrac{1}{\sin^2\frac{C}{2}}\ge 3.\sqrt[3]{\dfrac{1}{\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}}}$

Ta có bất đẳng thức: $\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}\le\dfrac{1}{8}$.

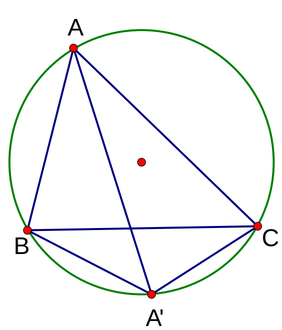
Do đó: $\dfrac{1}{\sin^2\frac{A}{2}}+\dfrac{1}{\sin^2\frac{B}{2}}+\dfrac{1}{\sin^2\frac{C}{2}}\ge 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{\left(\frac{1}{8}\right)^2}}=12$.

Vậy $\left(\dfrac{MA}{MB'+MC'}\right)^2+\left(\dfrac{MB}{MC'+MA'}\right)^2+\left(\dfrac{MC}{MA'+MB'}\right)^2\ge 3$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \triangle ABC$ đều và M là trọng tâm tam giác này.

2. Cho $\triangle ABC$. Các đường phân giác xuất phát từ A,B,C cắt đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ tại A',B',C' tương ứng. Chứng minh: $AA'.BB'.CC'\ge 16R^2r$.

Giải



Áp dụng định lý Ptolemy cho tứ giác $ABA'C$ ta có:

$AA'.BC=AB.A'C+AC.A'B$ hay $aAA'=cA'C+cA'B$.

Do AA' là tia phân giác $\widehat{BAC}$ nên A' là điểm chính giữa của cung BC.

Suy ra: $aAA'=(b+c)A'C=(b+c)2R\sin\dfrac{A}{2}$ (theo định lý sin)

$\Rightarrow AA' = \dfrac{2R(b+c)}{a}\sin\dfrac{A}{2}$.

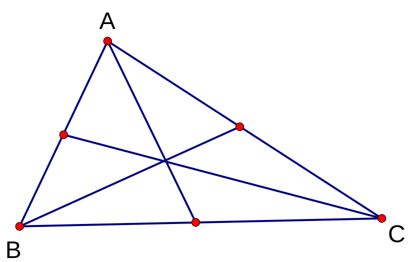
Chứng minh tương tự ta được: $BB' = \dfrac{2R(a+c)}{b}\sin\dfrac{B}{2}$; $CC' = \dfrac{2R(a+b)}{c}\sin\dfrac{C}{2}$.

Khi đó: $AA'.BB'.CC' = \dfrac{8R^3(b+c)(a+c)(a+b)}{abc}\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$

Do $r = 4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$ và $(b+c)(a+c)(a+b) \ge 8abc$ nên $AA'.BB'.CC' \ge 16R^2 r$.

3. Cho $\triangle ABC$ thỏa $m_a + m_b + m_c = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c)$. Chứng minh rằng ít nhất một trong ba bất đẳng thức sau xảy ra: $m_a = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a,\ m_b = \dfrac{\sqrt{3}}{2}b,\ m_c = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Giải



Theo giả thiết: $m_a + m_b + m_c = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a + \dfrac{\sqrt{3}}{2}b + \dfrac{\sqrt{3}}{2}c$ (1)

Đã biết: $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + \left(\dfrac{3}{2}b\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}c\right)^2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $m_am_b + m_bm_c + m_cm_a = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a\dfrac{\sqrt{3}}{2}b + \dfrac{\sqrt{3}}{2}b\dfrac{\sqrt{3}}{2}c + \dfrac{\sqrt{3}}{2}c\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ (3)

Bình phương hai vế của (3) ta được: $m_am_bm_c = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a.\dfrac{\sqrt{3}}{2}b.\dfrac{\sqrt{3}}{2}c$ (4)

Từ (1), (3) và (4) suy ra: $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a, \dfrac{\sqrt{3}}{2}b, \dfrac{\sqrt{3}}{2}c$ là 3 nghiệm của một phương trình bậc 3.

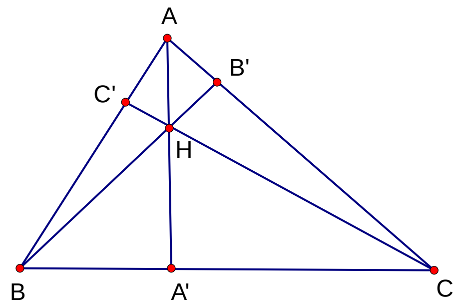
Giả sử $a \le b \le c \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2}a \le \dfrac{\sqrt{3}}{2}b \le \dfrac{\sqrt{3}}{2}c$.

Ta có kết quả quen thuộc sau: $m_c \le m_b \le m_a$.

Từ các nhận xét trên dễ dàng suy ra: $m_b = \dfrac{\sqrt{3}}{2}b$.

4. Cho $\triangle ABC$ có 3 góc nhọn với trực tâm H. Gọi diện tích các tam giác HAB, HBC, HCA lần lượt là: S_1, S_2, S_3. Chứng minh rằng $\triangle ABC$ đều $\Leftrightarrow \dfrac{2(S_1+S_2+S_3)}{27} \ge \dfrac{R}{r}$.

HD:



Ta có: $\dfrac{8\left(S_1+S_2+S_3\right)^3}{27S_1S_2S_3}=\dfrac{1}{S_1S_2S_3}\left[\dfrac{\left(S_1+S_2\right)+\left(S_2+S_3\right)+\left(S_3+S_1\right)}{3}\right]^3$

$\geq \dfrac{S_1+S_2}{S_3}.\dfrac{S_2+S_3}{S_1}.\dfrac{S_3+S_1}{S_3}$ (bất đẳng thức AM-GM).

Gọi A', B', C' lần lượt là các chân đường cao.

Ta có: $\dfrac{S_1+S_2}{S_3}=\dfrac{HB}{HB'}=\dfrac{HB}{HA}.\dfrac{HA}{HB'}=\dfrac{\sin\widehat{HAB}}{\sin\widehat{HBA}}.\dfrac{1}{\sin\widehat{HAC}}=\dfrac{\cos B}{\cos A\cos C}$.

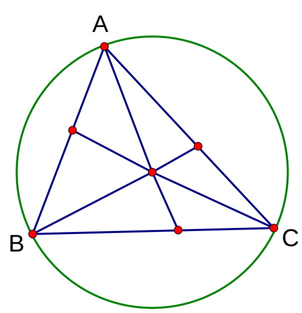
Chứng minh tương tự ta được: $\dfrac{S_2+S_3}{S_1}=\dfrac{\cos C}{\cos A\cos B}$; $\dfrac{S_3+S_1}{S_2}=\dfrac{\cos A}{\cos B\cos C}$.

Khi đó: $\dfrac{S_1+S_2}{S_3}.\dfrac{S_2+S_3}{S_1}.\dfrac{S_3+S_1}{S_3}=\dfrac{1}{\cos A\cos B\cos C}\geq\dfrac{8}{\left(\cos A+\cos B\right)\left(\cos B+\cos C\right)\left(\cos C+\cos A\right)}$

$\geq\dfrac{1}{\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}}=\dfrac{4R}{r}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}S_1=S_2=S_3\\A=B=C\end{cases}\Leftrightarrow\triangle ABC$ đều.

5. Cho $\triangle ABC$. Chứng minh rằng: $m_a+m_b+m_c\leq\dfrac{9R}{2}$.



Giải

Đã biết: $\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C\leq\dfrac{9}{4}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$m_a+m_b+m_c\leq\sqrt{3\left(m_a^2+m_b^2+m_c^2\right)}=\sqrt{3.\dfrac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)}$

$=\sqrt{9R^2\left(\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C\right)}\leq\sqrt{9R^2.\dfrac{9}{4}}=\dfrac{9R}{2}$.

6. Chứng minh rằng: $\alpha MA^2+\beta MB^2+\gamma MC^2\geq\dfrac{\alpha\beta\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\left(\dfrac{a^2}{\alpha}+\dfrac{b^2}{\beta}+\dfrac{c^2}{\gamma}\right)$, $\forall\alpha,\beta,\gamma>0$, $\forall M\in\left(ABC\right)$.

HD:

Dựng điểm $I\in\left(ABC\right)$ sao cho: $\alpha\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{IB}+\gamma\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow\alpha\left(\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{MA}\right)+\beta\left(\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{MB}\right)+\gamma\left(\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{MC}\right)=\vec{0}$

$$\Leftrightarrow (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{IM} = -\left(\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} = -\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{MA}+\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{MB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{MC}\right)$$

Đặt $x=\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}$, $y=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}$, $z=\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}$.

Khi đó:

$$\overrightarrow{IM} = -\left(x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}\right) \Rightarrow IM^2 = x^2MA^2+y^2MB^2+z^2MC^2+2xy\overrightarrow{MA}\overrightarrow{MB}+2yz\overrightarrow{MB}\overrightarrow{MC}+2zx\overrightarrow{MA}\overrightarrow{MC}$$

$$= x^2MA^2+y^2MB^2+z^2MC^2+xy\left(MA^2+MB^2-AB^2\right)+yz\left(MB^2+MC^2-BC^2\right)+zx\left(MC^2+MA^2-AC^2\right)$$

Do $IM^2 \geq 0$ nên suy ra được điều phải chứng minh.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv I$.

7. Cho $\triangle ABC$. Chứng minh rằng: $m_a.m_b.m_c \geq p\sqrt{r_a.r_b.r_c.r}$

HD:

Ta có: $S = pr = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c$.

Suy ra: $S^4 = p(p-a)(p-b)(p-c)r_a.r_b.r_c.r = S^2r_a.r_b.r_c.r \Rightarrow S = \sqrt{r_a.r_b.r_c.r}$ (1)

Mặt khác: $m_a^2 = \frac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{4} \geq \frac{(b+c)^2-a^2}{4} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4} = p(p-a) \Rightarrow m_a \geq \sqrt{p(p-a)}$.

Tương tự chứng minh được: $m_b \geq \sqrt{p(p-b)}$; $m_c \geq \sqrt{p(p-c)}$.

Suy ra: $m_am_bm_c \geq p\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = pS$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $m_a.m_b.m_c \geq p\sqrt{r_a.r_b.r_c.r}$.

8. Cho $\triangle ABC$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{R}+\frac{1}{r} \geq \frac{9\sqrt{3}}{2p}$.

Giải

Ta có: $abc = 4R.S = 4Rrp$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có: $(2p)^3 = (a+b+c)^3 \geq 27abc = 27.4Rrp \Rightarrow p^2 \geq \frac{27}{2}Rr$ (1)

Mà $r = \frac{S}{p} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p} \leq \frac{\sqrt{p\left[\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3}\right]^3}}{p} = \frac{p}{3\sqrt{3}}$

Suy ra: $p \geq 3\sqrt{3}r$ (2).

Từ (1) và (2) ta được: $p^3 \geq \frac{81\sqrt{3}}{2}Rr^2 \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{1}{4Rr^2}} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2p}$.

Lại áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có: $\frac{1}{R}+\frac{1}{r}=\frac{1}{R}+\frac{1}{2r}+\frac{1}{2r} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{4Rr^2}} \geq \frac{9\sqrt{3}}{2p}$

9. Cho 2012 điểm $A_1, A_2, ..., A_{2012}$ thuộc đường tròn tâm O bán kính $R=1$ sao cho: $\sum_{i=1}^{2012}\overrightarrow{OA_i}=\vec{0}$. Hãy xác định vị trí điểm B thuộc mặt phẳng chứa đường tròn này sao cho: $M=\frac{\sum_{i=1}^{2012}BA_i^3}{\sum_{i=1}^{2012}BA_i^4}$ lớn nhất.

Giải

Với mọi $i=1,2,...,2012$ ta có:

$$BA_i = \left|\overrightarrow{BA_i}\right| = \left|\overrightarrow{OA_i}-\overrightarrow{OB}\right| = \left|\overrightarrow{OA_i}-\overrightarrow{OB}\right|\left|\overrightarrow{OA_i}\right| \geq \left(\overrightarrow{OA_i}-\overrightarrow{OB}\right)\overrightarrow{OA_i} = OA_i^2 - \overrightarrow{OB}\overrightarrow{OA_i}$$

Suy ra: $\sum_{i=1}^{2012}BA_i \geq 2012 - \overrightarrow{OB}.\sum_{i=1}^{2012}\overrightarrow{OA_i} = 2012$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \overrightarrow{BA_i} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OA_i}$ với mọi $i=1,2,...,2012 \Leftrightarrow B \equiv O$.

Không giảm tính tổng quát, giả sử: $BA_1 \leq BA_2 \leq ... \leq BA_{2012}$.

Áp dụng bất đẳng thức Trebưsep cho hai dãy đơn điệu tăng: $\begin{cases} BA_1 \leq BA_2 \leq ... \leq BA_{2012} \\ BA_1^3 \leq BA_2^3 \leq ... \leq BA_{2012}^3 \end{cases}$ ta được:

$$\left(\sum_{i=1}^{2012}BA_i\right)\left(\sum_{i=1}^{2012}BA_i^3\right) \leq 2012\left(\sum_{i=1}^{2012}BA_i^4\right) \Rightarrow M \leq 1$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} BA_1 = BA_2 = ... = BA_{2012} \\ B \equiv O \end{cases} \Leftrightarrow B \equiv O$. Vậy $\max M = 1$

10. Trong tất cả các tứ giác lồi $ABCD$ có chu vi bằng 1, tìm tứ giác sao cho biểu thức:

$P=\frac{AB^4}{(AB+BC)\sin B}+\frac{BC^4}{(BC+CD)\sin C}+\frac{CD^4}{(CD+DA)\sin D}+\frac{DA^4}{(DA+AB)\sin A}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải

Đặt: $AB=a, BC=b, CD=c, DA=d$ và $S=\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+d}+\frac{d^2}{d+a}$.

Do $\frac{a^2-b^2}{a-b}+\frac{b^2-c^2}{b-c}+\frac{c^2-d^2}{c-d}+\frac{d^2-a^2}{d+a}=0$ nên $2S=\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+d^2}{c+d}+\frac{d^2+a^2}{d+a}$.

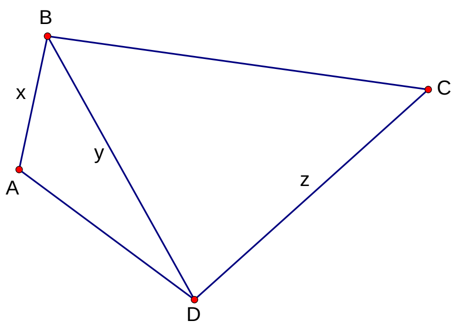
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có: $2S\geq\frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}(b+c)+\frac{1}{2}(c+d)+\frac{1}{2}(d+a)=1$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=d=\frac{1}{4}$.Lại áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có: $\frac{1}{4}\leq S^2\leq...\leq 4P$.

Suy ra: $P\geq\frac{1}{16}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow ABCD$ là hình vuông có cạnh bằng $\frac{1}{4}$.

11. Cho tứ giác lồi ABCD có diện tích bằng $\frac{1}{2}$ thỏa $AB+BD+DC\leq 2$. Tìm AC?

Giải

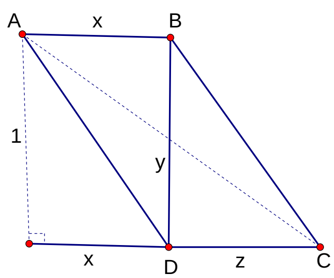


Giả sử $AB=x, BD=y, CD=z$. Khi đó: $x+y+z\leq 2$

$S_{\Delta ABD}\leq\frac{1}{2}xy,\ S_{\Delta BCD}\leq\frac{1}{2}yz,\ S_{ABCD}=\frac{1}{2}\leq\frac{1}{2}y(x+z)\Rightarrow y(x+z)\geq 1$

Nhưng $x+z\leq 2-y\Leftrightarrow y(x+z)\leq y(2-y)$.

Suy ra: $y(2-y)\geq 1\Leftrightarrow(y-1)^2\leq 0\Leftrightarrow y=1;\ x+z=1$ và tất cả các bất đẳng thức trở thành đẳng thức.



Như vậy $AB\perp BD, CD\perp BD$

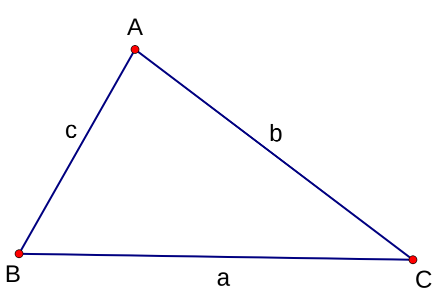
Hạ AK vuông góc với đường thẳng CD.

Áp dụng định lý Pythagore trong tam giác vuông AKC:

$AC=\sqrt{AK^2+KC^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

12. Tam giác ABC có $\widehat{C}=45^0$. Chứng minh rằng: $AB^4=\left(BC^2-AB^2\right)^2+\left(CA^2-AB^2\right)^2$.

Giải



Áp dụng định lý hàm số cosin ta có:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos 45^0=a^2+b^2-\sqrt{2}.ab$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a^2-c^2=\sqrt{2}ab-b^2\\ b^2-c^2=\sqrt{2}ab-a^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left(a^2-c^2\right)^2=2a^2b^2-2\sqrt{2}ab^3+b^4\\ \left(b^2-c^2\right)^2=2a^2b^2-2\sqrt{2}a^3b+a^4\end{cases}$$

$$\Rightarrow\left(a^2-c^2\right)^2+\left(b^2-c^2\right)^2=\left(a^2+b^2-\sqrt{2}ab\right)^2=\left(c^2\right)^2.$$

13. Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O, bán kính $R=\sqrt{5}$. Hai đường chéo của tứ giác vuông góc với nhau tại K và $OK=1$. Gọi S là diện tích của tam giác KCD. Chứng minh: $1\le S\le 4$.

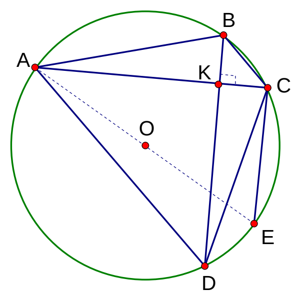
Giải

Vẽ đường kính AE. Khi đó $BD//CE \Rightarrow CBDE$ là hình thang cân, dẫn đến $BC=DE$.

Mặt khác, $KA^2+KB^2+KC^2+KD^2=AD^2+BC^2=AD^2+DE^2=AE^2=20$ (1)

Lại có: $KA.KC=KB.KD=\left|OK^2-R^2\right|=4\Rightarrow KA=\dfrac{4}{KC}, KB=\dfrac{4}{KD}$ (2)

Thay (2) vào (1) ta có: $20=\left(KC^2+KD^2\right)\left(1+\dfrac{16}{KC^2KD^2}\right)$



$\ge 2KC.KD\left(1+\dfrac{16}{KC^2KD^2}\right)=4S\left(1+\dfrac{16}{4S^2}\right)=4S+\dfrac{16}{S}$

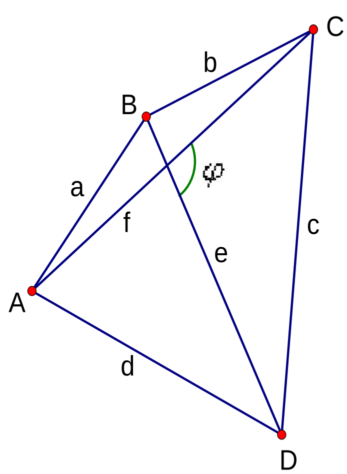
$\Leftrightarrow 5\ge S+\dfrac{4}{S}\Leftrightarrow S^2-5S+4\le 0\Leftrightarrow 1\le S\le 4$.

$S=1\Leftrightarrow KC=KD=\sqrt{2}$

$S=4\Leftrightarrow KC=KD=2\sqrt{2}$.

14. Trong tứ giác lồi, tổng các bình phương các cạnh và đường chéo bằng m. Chứng minh rằng diện tích của tứ giác không vượt quá $\dfrac{m}{8}$.

Giải



Theo điều kiện bài toán ta có:

$m=a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2\ge 2ab+2cd+2ef$

Và $S_{\triangle ABC}\le\dfrac{1}{2}ab$, $S_{\triangle ACD}\le\dfrac{1}{2}cd$

Suy ra: $S\le\dfrac{1}{2}(ab+cd)$.

Mặt khác $S=\dfrac{1}{2}ef\sin\varphi\le\dfrac{1}{2}ef\Leftrightarrow 2S\le ef$.

Lại có: $2S\le ab+cd\Leftrightarrow 4S\le 2ab+2cd$.

Như vậy $m\ge 8S\Leftrightarrow S\le\dfrac{m}{8}$.

15. Các đường phân giác AA', BB', CC' của $\triangle ABC$ bất kỳ cắt nhau tại điểm K. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{KA'}{AK}}+\sqrt{\frac{KB'}{BK}}+\sqrt{\frac{KC'}{CK}}\ge 2.$$

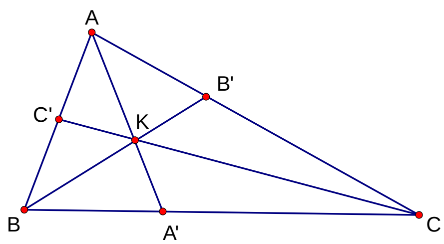
Giải

Ta sẽ chứng minh: $\dfrac{KA'}{AK}=\dfrac{a}{b+c}$?

Đặt $A'B=x\Rightarrow A'C=a-x$. Ta có: $\dfrac{x}{a-x}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{c}{b}\Leftrightarrow bx=ac-cx\Leftrightarrow x=\dfrac{ac}{b+c}$.

$\dfrac{KA'}{AK}=\dfrac{A'B}{AB}=\dfrac{x}{c}=\dfrac{\frac{ac}{b+c}}{c}=\dfrac{a}{b+c}$. Chứng minh tương tự ta được: $\dfrac{KB'}{BK}=\dfrac{b}{a+c}$; $\dfrac{KC'}{CK}=\dfrac{c}{a+b}$

Bất đẳng thức cần chứng minh có dạng: $\sqrt{\dfrac{a}{b+c}}+\sqrt{\dfrac{b}{a+c}}+\sqrt{\dfrac{c}{a+b}}\geq 2$



Áp dụng AM-GM ta có: $\dfrac{\frac{b+c}{a}+1}{2}\geq\sqrt{\dfrac{b+c}{a}}\Leftrightarrow\dfrac{p}{a}\geq\sqrt{\dfrac{b+c}{a}}$

$\Rightarrow\sqrt{\dfrac{a}{b+c}}\geq\dfrac{a}{p}$

Chứng minh tương tự ta được: $\sqrt{\dfrac{b}{a+c}}\geq\dfrac{b}{p}$; $\sqrt{\dfrac{c}{a+b}}\geq\dfrac{p}{c}$.

Cộng vế theo vế của ba bất đẳng thức này ta được điều phải chứng minh.

16. Các đường phân giác AA',BB',CC' của $\triangle ABC$ bất kỳ cắt nhau tại điểm K. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[3]{\frac{AK}{AA'}.\frac{BK}{BB'}.\frac{CK}{CC'}}\leq\frac{2}{3}.$$

Giải

Dễ dàng chứng minh được: $\dfrac{AK}{AA'}.\dfrac{BK}{BB'}.\dfrac{CK}{CC'}=\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3}$; $\dfrac{AK}{AA'}.\dfrac{BK}{BB'}.\dfrac{CK}{CC'}=2$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta suy ra được đpcm.

17. Cho tam giác ABC và điểm M tùy ý trong mp(ABC). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{MA}{a}+\frac{MB}{b}+\frac{MC}{c}$$

Giải

Ta có: $4m_a^2=2\left(b^2+c^2\right)-a^2\Rightarrow 2\left(b^2+c^2+a^2\right)=4m_a^2+3a^2\geq 4m_a a\sqrt{3}\Rightarrow am_a\leq\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2\sqrt{3}}$.

Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$.

Khi đó: $\dfrac{MA}{a}=\dfrac{MA.GA}{aGA}\geq\dfrac{\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{GA}}{\frac{a^2+b^2+c^2}{2\sqrt{3}}.\frac{2}{3}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{a^2+b^2+c^2}\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)\overrightarrow{GA}=\dfrac{3\sqrt{3}}{a^2+b^2+c^2}\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+GA^2\right)$

Làm tương tự với $\dfrac{MB}{b}$; $\dfrac{MC}{c}$

Suy ra: $P\geq\dfrac{3\sqrt{3}}{a^2+b^2+c^2}\left(GA^2+GB^2+GC^2\right)$

Để ý rằng: $GA^2+GB^2+GC^2=\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)$

Suy ra: $P\ge\sqrt{3}$.

18. Cho $\triangle ABC$. Chứng minh rằng: $\frac{h_a}{l_a}+\frac{h_b}{l_b}+\frac{h_c}{l_c}\ge 3\sqrt[3]{\frac{2r}{R}}$.

Ta có: $h_a=\frac{2S}{a}=\frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}$; $l_a=\frac{2}{b+c}\sqrt{bc.p(p-a)}$

Suy ra: $\frac{h_a}{l_a}=\frac{(b+c)\sqrt{(p-b)(p-c)}}{a\sqrt{bc}}\ge\frac{2\sqrt{(p-b)(p-c)}}{a}$ (bất đẳng thức AM-GM)

Làm tương tự cho $\frac{h_b}{l_b}$; $\frac{h_c}{l_c}$?

Suy ra: $\frac{h_a}{l_a}+\frac{h_b}{l_b}+\frac{h_c}{l_c}\ge 2\left(\frac{\sqrt{(p-b)(p-c)}}{a}+\frac{\sqrt{(p-c)(p-a)}}{b}+\frac{\sqrt{(p-a)(p-c)}}{c}\right)$.

Lại áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

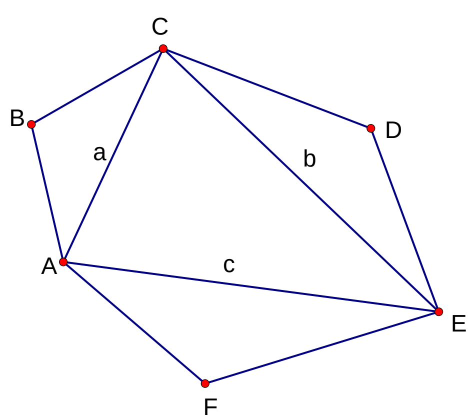
$$\frac{\sqrt{(p-b)(p-c)}}{a}+\frac{\sqrt{(p-c)(p-a)}}{b}+\frac{\sqrt{(p-a)(p-c)}}{c}\ge 3\sqrt[3]{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}}$$

Suy ra: $\frac{h_a}{l_a}+\frac{h_b}{l_b}+\frac{h_c}{l_c}\ge 6\sqrt[3]{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}}=6\sqrt[3]{\frac{S^2}{p4RS}}=6\sqrt[3]{\frac{pr}{4pR}}=3\sqrt[3]{\frac{2r}{R}}$.

19. Cho lục giác lồi ABCDEF thỏa mãn: $AB=BC,\ CD=DE,\ EF=FA$.

Chứng minh rằng: $\frac{BC}{BE}+\frac{DE}{DA}+\frac{FA}{FC}\ge\frac{3}{2}$.

Giải



Áp dụng bất đẳng thức Ptôlêmê cho tứ giác ACEF, ta có:

$AC.EF+CE.AF\ge AE.CF\Rightarrow AF(a+b)\ge cCF\Rightarrow\frac{FA}{FC}\ge\frac{c}{a+b}$

Chứng minh tương tự cho $\frac{DE}{DA}$; $\frac{BC}{BE}$?

Khi đó: $\frac{BC}{BE}+\frac{DE}{DA}+\frac{FA}{FC}\ge\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}$

(bất đẳng thức Nesbit)

20. Cho $\triangle ABC$. Chứng minh rằng: $r_a^2+r_b^2+r_c^2\ge m_a^2+m_b^2+m_c^2$ (1). Dấu "=" xảy ra khi nào?

Giải

Ta có: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=(p-a)r_a\Rightarrow r_a=\frac{\sqrt{p(p-b)(p-c)}}{p-a}$

Và $\quad m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)$.

Khi đó: $(1)\Leftrightarrow p\left[\frac{(p-b)(p-c)}{p-a}+\frac{(p-c)(p-a)}{p-b}+\frac{(p-a)(p-b)}{p-c}\right]\geq\frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)\quad(2)$

Đặt $x=p-a,\ y=p-b,\ z=p-c\Rightarrow\begin{cases}p=x+y+z\\a=y+z;\ b=z+x;\ c=x+y\end{cases}$.

(2) thành: $(x+y+z)\left(\frac{yz}{z}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}\right)\geq\frac{3}{4}\left[(y+z)^2+(z+x)^2+(x+y)^2\right]\quad(3)$

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức (3)

Thật vậy, $VT(3)=xy+yz+zx+x^2\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+y^2\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+z^2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$

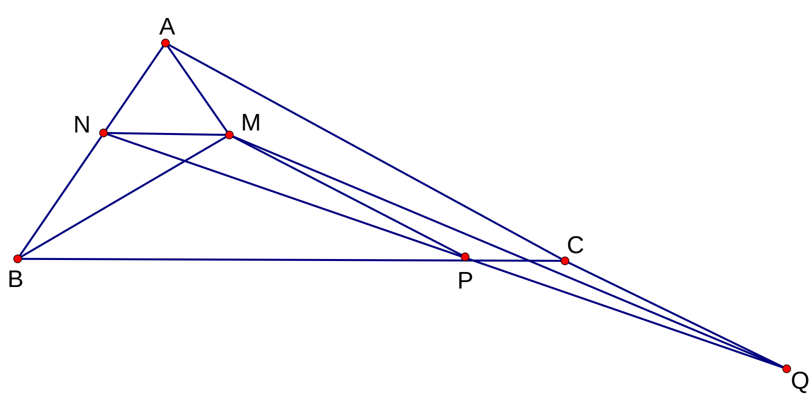
$$\geq xy+yz+zx+2x^2+2y^2+2z^2\geq\frac{3}{2}\left(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx\right)=VP(3).$$

21. Cho M là một điểm nằm ở miền trong $\triangle ABC$ và N,P,Q là ba điểm thẳng hàng nằm trên các cạnh AB,BC và CA. Chứng minh rằng nếu $\frac{S_{MAN}}{S_{MBN}}+\frac{S_{MBP}}{S_{MCP}}=2\sqrt{\frac{S_{MAQ}}{S_{MCQ}}}$ thì $NP//AC$.

Giải

Sử dụng định lý Menelaus ta có: $\frac{NA}{NB}.\frac{PB}{PC}.\frac{QC}{QA}=1$.

Do đó: $\frac{S_{MAN}}{S_{MBN}}.\frac{S_{MBP}}{S_{MCP}}.\frac{S_{MCQ}}{S_{MAQ}}=1$ hay $\frac{S_{MAN}}{S_{MBN}}.\frac{S_{MBP}}{S_{MCP}}=\frac{S_{MQA}}{S_{MCQ}}$.

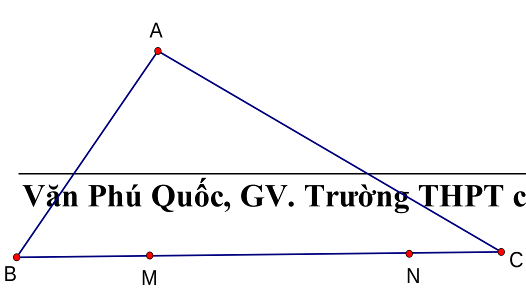


Từ điều kiện bài toán ta được:

$\frac{S_{MAN}}{S_{MBN}}+\frac{S_{MBP}}{S_{MCP}}=2\sqrt{\frac{S_{MAN}}{S_{MBN}}.\frac{S_{MBP}}{S_{MCP}}}\Leftrightarrow\frac{S_{MAN}}{S_{MBN}}=\frac{S_{MBP}}{S_{MCP}}$. Như vậy $\frac{NA}{NB}=\frac{PB}{PC}\Rightarrow NP//AC$.

22. Trên cạnh BC của một $\triangle ABC$, xét hai điểm M,N thỏa mãn $\widehat{BAM}=\widehat{CAN}$.

Chứng minh rằng: $\frac{MB}{MC}+\frac{NB}{NC}\geq 2\frac{AB}{AC}$.



Giải

Sử dụng định lý Steiner ta có:

$$\frac{MB.NB}{MC.BC}=\frac{AB^2}{AC^2}.$$

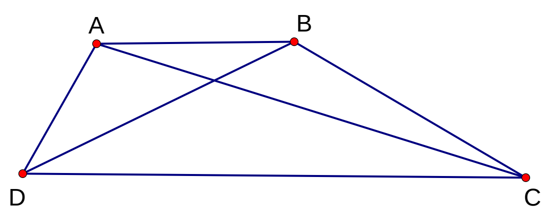
Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta được:

$$\frac{MB}{MC}+\frac{NB}{NC}\ge 2\sqrt{\frac{MB.NB}{MC.NC}}=2\frac{AB}{AC}.$$

23. Cho $ABCD$ là một hình thang với đáy AB và CD. Chứng minh rằng:

$$\frac{AB^2-BC^2+AC^2}{CD^2-AD^2+AC^2}=\frac{AB^2-AD^2+BD^2}{CD^2-BC^2+BD^2}=\frac{AB}{CD}.$$

Giải



Từ định lý Cosin trong tam giác ta suy ra:

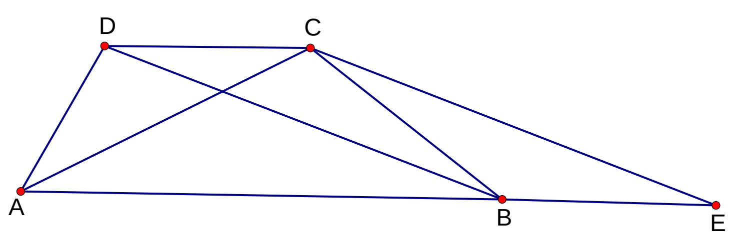
$$2AB.AC\cos\widehat{BAC}=AB^2-BC^2+AC^2 \quad (1)$$
$$2DC.AC\cos\widehat{DCA}=CD^2-AD^2+AC^2 \quad (2)$$
$$2AB.DB\cos\widehat{DBA}=AB^2-AD^2+DB^2 \quad (3)$$
$$2DC.DB\cos\widehat{CDB}=CD^2-BC^2+DB^2 \quad (4)$$

Lưu ý rằng: $\widehat{BAC}=\widehat{DCA},\ \widehat{DBA}=\widehat{CDA}$.

Từ (1) và (2) , (3) và (4) ta thu được: $\dfrac{AB^2-BC^2+AC^2}{CD^2-AD^2+AC^2}=\dfrac{AB^2-AD^2+BD^2}{CD^2-BC^2+BD^2}=\dfrac{AB}{CD}$.

24. Cho $ABCD$ là một hình thang không cân với đáy AB và CD. Chứng minh rằng:

$$\frac{AC^2-BD^2}{AD^2-BC^2}=\frac{AB+CD}{AB-CD}.$$



Giải

Từ C kẻ đường thẳng song song với BD cắt AB tại E.

Áp dụng công thức Stewart ta được:

$$AC^2.BE+CE^2.AB-CB^2.AE=AB.BE.AE$$

Vì $CE=BD$ và $BE=CD$ nên suy ra:

$$AC^2.CD+BD^2.AB-BC^2.(AB+CD)=AB.CD.(AB+CD) \quad (1)$$

Từ D kẻ đường thẳng song song với AC cắt AB, rồi làm tương tự như trên ta cũng thu được:

$$BD^2.CD+AC^2.AB-AD^2.(AB+CD)=AB.CD.(AB+CD) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\left(AC^2 - BD^2\right)\left(AB - CD\right) = \left(AD^2 - BC^2\right)\left(AB + CD\right)$.

CHƯƠNG V: ĐA THỨC

1. Tìm tất cả các đa thức không là hằng số $P(x)$ sao cho:

$$P(x)P(x+1) = P\left(x^2 + x + 1\right).$$

Giải

Giả sử a là một nghiệm của đa thức $P(x)$. Khi đó $a^2 + a + 1$ cũng là nghiệm của đa thức $P(x)$.

Từ điều kiện bài toán thay x bởi $x - 1$ ta được: $P(x)P(x-1) = P\left(x^2 - x + 1\right)$.

Dễ thấy $a^2 - a + 1$ cũng là nghiệm của đa thức $P(x)$.

Chọn a là nghiệm có modul lớn nhất (nếu có vài nghiệm như thế thì ta chọn một trong chúng). Từ cách chọn ta suy ra: $\left|a^2 + a + 1\right| \le |a|$; $\left|a^2 - a + 1\right| \le |a|$.

Áp dụng bất đẳng thức về modul ta có: $|2a| \le \left|a^2 + a + 1\right| + \left|-a^2 + a - 1\right| \le |a| + |a| = |2a|$.

Như vậy, dấu "=" xảy ra ở các đẳng thức trên. Suy ra: $a^2 + a + 1 = k\left(-a^2 + a - 1\right), k > 0$.

Nếu $\left|a^2 + a + 1\right| < \left|a^2 - a + 1\right|$ thì $2\left|a^2 - a + 1\right| > \left|a^2 - a + 1\right| + \left|a^2 + a + 1\right| \ge 2|a|$, vô lý.

Tương tự: nếu $\left|a^2 + a + 1\right| > \left|a^2 - a + 1\right|$ thì cũng dẫn đến một điều vô lý.

Vậy $\left|a^2 + a + 1\right| = \left|a^2 - a + 1\right|$. Từ đó $k = 1$ và ta có

$a^2 + a + 1 = -a^2 + a - 1 \Leftrightarrow a^2 = -1 \Leftrightarrow a = \pm i$.

Như vậy $x^2 + 1$ là thừa số của $P(x)$. Do đó: $Q(x) = \left(x^2 + 1\right)^m P(x)$.

Ta đi đến kết luận rằng $Q(x) \equiv C$. Suy ra: $P(x) \equiv C\left(x^2 + 1\right)^m$.

Thay vào điều kiện bài toán ta thu được $C = 1$.

Vậy $P(x) \equiv \left(x^2 + 1\right)^m$ là đa thức cần tìm thỏa yêu cầu bài toán.

2. Tìm đa thức $P(x)$ thỏa mãn: $P\left(P(x)\right) + 1 = \left[P^2(x) + 2P(x) + \left(x^2 + 3x + 1\right)^2\right]^2$.

Giải

Rõ ràng: đa thức $P(x) \equiv 0$ không thỏa mãn.

Gọi a_0 là hệ số cao nhất của $P(x)$.

Khai triển hai vế thì số hạng lớn nhất của $P\left(P(x)\right) + 1$ là: $a_0\left(a_0 x^n\right)^n = a_0^{n+1} x^{n^2}$.

Còn số hạng lớn nhất của $\left[P^2(x) + 2P(x) + \left(x^2 + 3x + 1\right)^2\right]$ là:

$\left[\left(a_0 x^n\right)^2 + x^4\right]^2 = \left(a_0^2 + 1\right)^2 x^8$ nếu $n = 2$ hoặc x^8 nếu $n < 2$.

- Nếu $n \le 2$ thì $x^{n^2} = x^8 \Rightarrow n^2 = 8$, vô lý vì $n \in \mathbb{N}^*$.

- Nếu $n > 2$ thì $a_0^{n+1}x^{n^2} = a_0^4x^{4n}$. Suy ra: $n = 4, a_0 = 1$.

Do đó đa thức cần tìm có dạng: $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Đặt $Q(x) = P(x) - (x^2 + 3x + 1)^2 + 1$.

Điều kiện bài toán đã cho tương đương với:

$$P(P(x)) + 1 = \left[P^2(x) + 3P(x) + 1 - Q(x)\right]^2$$

$$\Leftrightarrow P(P(x)) - \left[P^2(x) + 3P(x) + 1\right]^2 + 1 = Q(x)\left[Q(x) - 2\left(P^2(x) + 3P(x) + 1\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow G(Q(x)) = Q(x)\left[Q(x) - 2\left(P^2(x) + 3P(x) + 1\right)\right].$$

Nếu $Q(x) \neq 0$ ta đặt $\deg Q = k \leq 3$. Khi đó: $4k = k + 8$, không có nghiệm $k \in \mathbb{N}$. Do đó $Q(x) \equiv 0$.

Vậy $P(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)$.

3. (USA 1976). Giả sử các đa thức $P(x), Q(x), R(x), S(x)$ thỏa mãn đồng nhất thức:

$P(x^5) + xQ(x^5) + x^2R(x^5) = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)S(x)$.

Chứng minh rằng đa thức $P(x)$ chia hết cho đa thức $x - 1$.

Giải

Cách 1: Đặt $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$ thì $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4$ là các nghiệm phức của phương trình $x^5 = 1$.

Từ điều kiện bài toán lần lượt thay x bằng $\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4$ rồi cộng tất cả lại với nhau ta được: $P(1) = 0$. Do đó: đa thức $P(x)$ chia hết cho đa thức $x - 1$.

Cách 2:

Giả sử $S(x) = s_0 + s_1x + \ldots + s_nx^n$.

Nhân hai vế của đẳng thức đã cho với $x - 1$ ta có:

$(x-1)\left[P(x^5) + xQ(x^5) + x^2R(x^5)\right] = (x^5 - 1)S(x)$

hay $P(x^5) + (x^5 - 1)S_1(x) = -(x^5 - 1)S_2(x) + xP(x^5) + (x^2 - x)Q(x^5) + (x^3 - x)R(x^5)$

với $S_1(x) = s_0 + s_5x^5 + s_{10}x^{10} + \ldots + s_{5m}x^{5m}$ và $S_2(x) = S(x) - S_1(x)$.

Vế trái của đẳng thức này chỉ có mặt với lũy thừa là bội của 5, còn vế phải với lũy thừa không là bội của 5 nên cả hai vế của đẳng thức bằng 0 (do so sánh hệ số của hai đa thức).

Từ đó suy ra: $P(x^5) = -(x^5 - 1)S_1(x)$. Thay $x = 1$ ta được $P(1) = 0$. Theo định lý Bézout ta suy ra: đa thức $P(x)$ chia hết cho đa thức $x - 1$.

4. Tìm tất cả các đa thức hệ số thực sao cho $P(2) = 12$ và $P(x^2) = x^2(x^2 + 1)P(x)$.

Giải

Dễ thấy $\deg P = 4$.

Thay $x = 0, x = 1, x = i$ ta được $P(0) = P(1) = P(-1) = 0$.

Đặt $P(x) = x^kQ(x)$. Dễ dàng tính được: $k = 2$.

Do đó: $P\left(x\right)=Cx^{2}\left(x^{2}-1\right)$. Kết hợp với $P\left(2\right)=12$ ta tính được $C=1$.

Vậy $P\left(x\right)=x^{2}\left(x^{2}-1\right)$.

5. Cho đa thức $P\left(x\right)$ thỏa mãn điều kiện:

$P\left(2013\right)=2013!$ và $xP\left(x-1\right)=\left(x-2013\right)P\left(x\right)$.

Chứng minh rằng đa thức $Q\left(x\right)=P^{2}\left(x\right)+1$ là bất khả quy.

Giải

Rõ ràng: $P\left(x\right)=0$ với mọi $x\in\left\{0;1;2;...;2012\right\}$.

Đặt $P\left(x\right)=x\left(x-1\right)\left(x-2\right)...\left(x-2012\right)R\left(x\right)$.

Thay vào giả thiết bài toán ta được: $R\left(x\right)=R\left(x-1\right)$. Do đó: $R\left(x\right)\equiv C$.

Vì $P\left(2013\right)=2013!$ nên $R\left(x\right)\equiv 1$. Suy ra: $P\left(x\right)=x\left(x-1\right)\left(x-2\right)...\left(x-2012\right)$.

Giả sử tồn tại hai đa thức $U\left(x\right),V\left(x\right)$ sao cho: $Q\left(x\right)=P^{2}\left(x\right)+1=U\left(x\right)V\left(x\right)$ với $\deg U,\deg V\geq 1$ và $\deg U\leq\deg V$.

Rõ ràng $U\left(x\right)V\left(x\right)>0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên trên tập $\mathbb{R}$ hai đa thức này cùng âm hoặc cùng dương. Giả sử rằng chúng cùng dương. Khi đó nếu $\deg U<2013$ thì đa thức $U\left(x\right)-1$ có bậc bé hơn 2013 nhưng có 2013 nghiệm nên là đa thức 0. Suy ra: $U\left(x\right)=1$, vô lý.

Nếu $\deg U=\deg V=2013$ thì đa thức $U\left(x\right)-V\left(x\right)$ có bậc bé hơn 2013 mà có 2013 nghiệm nên $U\left(x\right)=V\left(x\right)$.

Vậy $Q\left(x\right)=P^{2}\left(x\right)+1$ là bất khả quy.

6. (VMS 2009). Cho $P\left(x\right)$ là đa thức bậc n. Chứng minh rằng phương trình $P\left(x\right)=2^{x}$ có không quá $n+1$ nghiệm.

Giải

Cách 1 :Xét hàm số: $f\left(x\right)=P\left(x\right)-2^{x}$.

Ta có: $f'\left(x\right)=P'\left(x\right)-2^{x}\ln 2\Rightarrow...\Rightarrow f^{(n)}\left(n\right)=P^{(n)}\left(x\right)-2^{x}\ln^{n}2$.

Do $P\left(x\right)$ là đa thức bậc n nên $P^{(n+1)}\left(x\right)=0$.

Khi đó: $f^{(n+1)}\left(x\right)=0\Leftrightarrow -2^{x}\ln^{n+1}2=0\Leftrightarrow 2^{x}=0$, vô nghiệm thực.

Khi đó theo định lý Rolle có không quá $n+1$ nghiệm thực.

Cách 2 :

Chứng minh bằng phương pháp quy nạp theo $n=\deg P$.

Khi $n=0$ thì $P\left(x\right)\equiv C$ và phương trình $2^{x}=C$ hiển nhiên có không quá 1 nghiệm thực.

Giả sử khẳng định đúng với các đa thức bậc $n-1$. Ta xét đa thức tùy ý với $\deg P = n$ và hàm số $f(x) = 2^x - P(x)$. Khi đó : $f'(x) = 2^x \ln 2 - P'(x) = \ln 2\left(2^x - \dfrac{P'(x)}{\ln 2}\right)$.

Vì $\dfrac{P'(x)}{\ln 2}$ là đa thức bậc $n-1$ nên theo giả thiết quy nạp thì phương trình $f'(x) = 0$ có không quá n nghiệm. Khi đó theo định lý Rolle thì phương trình $f(x) = 0$ có không quá $n+1$ nghiệm.

7. Tam thức bậc hai $P(x)$ với hệ số thực sao cho phương trình $P(x) = x$ không có nghiệm thực. Chứng minh rằng phương trình $P(P(x)) = x$ cũng không có nghiệm thực.

Giải

Nếu tồn tại hai số a, b sao cho $P(a) < a; P(b) > b$. Hàm $Q(x) = P(x) - x$ sẽ nhận hai giá trị trái dấu : $Q(a) < 0; Q(b) > 0$. Suy ra : $P(x) = x$ với x nào đó. Điều này trái với giả thiết. Như vậy chỉ có hoặc $P(x) > x, \forall x \in \mathbb{R}$ hoặc $P(x) < x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Khi đó : hoặc là $P(P(x)) > P(x) > x$ hoặc là $P(P(x)) < P(x) < x$.

8. (Rumania 1966). Tìm tất cả các đa thức $R(x)$ bậc bé hơn 4 mà với mọi đa thức ấy tồn tại đa thức $P(x)$ thỏa mãn đồng nhất thức :

$$7\sin^{31} t + 8\sin^{13} t - 5\sin^5 t\cos^4 t - 10\sin^7 t + 5\sin^5 t - 2$$
$$= P(\sin t)\left[\sin^4 t - (1+\sin t)(\cos^2 t - 2)\right] + R(\sin t), t \in \mathbb{R}.$$

Giải

Thay $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$ và $\sin t = x$. Khi đó $R(x)$ có bậc bé hơn 4 là số dư trong phép chia đa thức $S(x) = 7x^{31} + 8x^{13} - 5x^9 - 2$ cho đa thức $Q(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$(vì đẳng thức $S(x) = P(x)Q(x) + R(x)$ thỏa mãn với mọi $x \in [-1;1]$).

Vì $(x-1)Q(x) = x^5 - 1$ nên tồn tại bốn giá trị khác nhau của biến x thỏa mãn điều kiện $Q(x) = 0$. Với mỗi giá trị này ta có đẳng thức $x^5 = 1$ và

$$R(x) = S(x) = 7x^{31} + 8x^{13} - 5x^9 - 2 = 7\left(x^5\right)^6 x + 8\left(x^5\right)^2 x^3 - 5x^5x^4 - 2$$
$$= 7x + 8x^3 - 5x^4 - 2 + 5Q(x) \quad (\, Q(x) = 0 \text{ với 4 giá trị của } x\,).$$
$$= 13x^3 + 5x^2 + 12x + 3.$$

Như vậy, đa thức $R(x)$ và đa thức $13x^3 + 5x^2 + 12x + 3$ có bậc không vượt quá 3 mà nhận giá trị bằng nhau tại 4 giá trị khác nhau nên chúng phải trùng nhau.

Kết luận : $R(x) = 13x^3 + 5x^2 + 12x + 3$.

9. (Rumania 1962. Chứng minh rằng với mọi giá trị $n \in \mathbb{N}$ và $\alpha \in \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện $n \neq 1, \sin\alpha \neq 0$, đa thức $P(x) = x^n \sin\alpha - x\sin n\alpha + \sin(n-1)\alpha$ chia hết cho đa thức $Q(x) = x^2 - 2x\cos\alpha + 1$.

Giải

Ký hiệu $x_\varepsilon = \cos\alpha + i\varepsilon\sin\alpha$ với $\varepsilon \in \{-1;1\}$.

Khi đó đa thức $Q(x)$ được biểu diễn dưới dạng :

$$Q(x) = (x - \cos\alpha - i\sin\alpha)(x - \cos\alpha + i\sin\alpha) = (x - x_1)(x - x_{-1}).$$

Do đó : $P(x_\varepsilon) = (\cos n\alpha + i\varepsilon\sin n\alpha)^n \sin n\alpha - (\cos\alpha + \varepsilon i\sin\varepsilon)\sin n\alpha + \sin(n-1)\alpha$

$$= \sin(1-n)\alpha + \sin(n-1)\alpha = 0.$$

Như vậy theo định lý Bézout đa thức $P(x)$ chia hết cho mỗi đa thức $x - x_1$; $x - x_{-1}$

(hai đa thức này khác nhau vì $\sin\alpha \neq 0$) nghĩa là chia hết cho $Q(x)$.

10.(Problem 2, VMS 2012). Cho $P(x)$ là đa thức bậc $n \geq 1$ với hệ số thực và đa thức $Q(x)$ cho bởi :

$Q(x) = (2012x^2 + 1)P(x)P'(x) + 2012x\left[P^2(x) + P'^2(x)\right].$

Chứng minh rằng : nếu phương trình $P(x) = 0$ có đúng n nghiệm thực phân biệt trong $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$ thì phương trình $Q(x) = 0$ có ít nhất $2n-1$ nghiệm thực phân biệt.

Giải

- Ta có: $Q(x) = \left[2012xP(x) + P'(x)\right]\left[xP'(x) + P(x)\right] = e^{-1006x^2}\left[e^{1006x^2}P(x)\right]'\left[xP(x)\right]'$

- Nếu $b < c$ là hai không điểm liên tiếp của $P(x)$ thì theo định lý Rolle hàm $\left[e^{1006x^2}P(x)\right]'$ có một không điểm r nằm giữa b,c và $\left[xP(x)\right]'$ có không điểm r^* nằm giữa b,c. Ta chứng minh $r \neq r^*$. Thật vậy nếu $r = r^*$ thì: $\begin{cases} P'(r) + 2012P(r) = 0 \\ rP'(r) + P(r) = 0 \end{cases}$.

Hệ phương trình này cho ta: $P(r) = 0$. Điều này vô lý.

- Vì vậy nếu $c_1 < c_2 < ... < c_n$ là các không điểm liên tiếp của $P(x)$ thì $Q(x)$ có ít nhất $2n-2$ không điểm nằm giữa không điểm nằm giữa c_1 và c_n.

- Ngoài ra, giữa $(0;c_1)$ có một nghiệm của $\left[xP(x)\right]'$.

Vậy $Q(x)$ có ít nhất $2n-1$ nghiệm phân biệt.

11. (Problem 6a, VMS 2012). Cho đa thức $P(x)$ với hệ số nguyên và a_0 là một số nguyên cho trước. Với mọi số nguyên dương k, đặt $a_{k+1} = P(a_k)$. Chứng minh rằng tồn tại số m để hoặc $|a_m| < |a_{m+1}| < ...$ hoặc $a_m, a_{m+1}, ...$ là dãy số tuần hoàn với chu kì không quá 2 (tức $a_m = a_{m+2} = ...$).

Giải

- Nếu $P(x)$ là đa thức hằng hoặc bằng $\pm x + d$ thì dễ thấy đúng.

- Bây giờ, giả sử $P(x)$ là đa thức bậc hai trở đi hoặc đa thức bậc nhất hệ số khác ± 1.

Khi đó tồn tại số $\alpha > 0$ sao cho $|P(x)| > |x|$ với mọi x mà $|x| > \alpha$.

- Nếu dãy $a_1, a_2, \ldots$ không bị chặn thì chọn m sao cho $|a_m| > \alpha$. Khi đó:

$$\alpha < |a_m| < |a_{m+1}| < \ldots$$

- Ngược lại sẽ có $1 < k < l$ để $a_k = a_l$. Nếu $l = k + 1$ thì $a_k = a_{k+1} = a_{k+2} = \ldots$

Giả sử $l \geq k + 2$. Đặt $b_i = a_{i+1} - a_i$. Khi đó $b_{i+1} = P(a_i) - P(a_{i-1})$ chia hết cho $a_i - a_{i-1} = b_{i-1}$. Như vậy $|b_0| \leq |b_1| \leq \ldots$ và vì $b_{k-1} = b_{l-1}$ nên phải có $|b_{k-1}| = |b_k| = \ldots = |b_{l-1}|$

Nhưng $b_k + b_{k+1} + \ldots + b_{l-1} = a_l - a_k = 0$.

Do đó dãy $b_k, b_{k+1}, \ldots, b_{l-1}$ phải đổi dấu, tức là có m để $b_m = -b_{m+1}$. Suy ra: $a_m = a_{m+2}$.

Lúc đó $a_{m+1} = P(a_m) = P(a_{m+2}) = a_{m+3}$ và vì vậy $a_{m+4} = a_{m+2}$.

12. (VMS 2008). Tồn tại hay không đa thức bậc 2008 thỏa mãn điều kiện $P(k) = 2^k$ với $k \in \{0;1;\ldots;2008\}$? Tại sao?

Giải

Cách 1:

Với mỗi $x = 0,1,2,\ldots$ xét biểu thức $Q(x) = C_x^0 + C_x^1 + C_x^2 + \ldots + C_x^{x-2} + C_x^{x-1} + C_x^x$.

Từ biểu thức nói trên ta xác định được đa thức $P(x) := Q(x)$, vì đa thức này thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2:

Với mỗi $k = 0;1;2;\ldots$ đặt $\omega_k = \dfrac{x(x-1)\ldots(x-(k-1))(x-(k+1))\ldots(x-2008)}{(k-0)(k-1)\ldots(k-(k-1))\ldots(k-2007)}$.

Dễ dàng chứng minh đa thức $P(x) = \sum_{k=0}^{2008} 2^k \omega_k(x)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

13. (VMS 2009). Ứng với mỗi đa thức $P(x)$ với hệ số thực và có nhiều hơn một nghiệm, gọi $d(P)$ là khoảng cách nhỏ nhất giữa hai nghiệm thực bất kì của nó. Giả sử các đa thức với hệ số thực $P(x)$ và $P(x) + P'(x)$ đều có bậc $k > 1$ và có k nghiệm thực phân biệt. Chứng minh rằng: $d(P + P') \geq d(P)$.

Giải

Gọi nghiệm của $P(x)$ là $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sao cho $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$. Ta chứng minh bằng phương pháp phản chứng. Giả sử $d(P + P') = \beta - \alpha < d(P)$ trong đó α, β là hai nghiệm gần nhau nhất trong số các nghiệm của $P(x) + P'(x)$. Khi đó α, β không là nghiệm của $P(x)$ nên $\dfrac{P'(\alpha)}{P(\alpha)} = -1, \dfrac{P'(\beta)}{P(\beta)} = -1$

(1)

Đặt $P(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{k-1})(x - x_k)$.

Suy ra: $\dfrac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{j=1}^{k} \dfrac{1}{x - x_j}$.

Dễ dàng thấy rằng: $\dfrac{P'(x)}{P(x)}$ là hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.

Kết hợp với (1) suy ra tồn tại duy nhất j_0 sao cho $x_{j_0} \in (\alpha, \beta)$. Khi đó $x_{i+1} - x_i > \beta - \alpha$ với mọi $i \in \{1;2;...;n\}$ hay $\alpha - x_i > \beta - x_{i+1}$. Dễ dàng kiểm tra được $(\alpha - x_i)(\beta - x_{i+1}) > 0$ và do đó $\dfrac{1}{\alpha - x_i} < \dfrac{1}{\beta - x_{i+1}}$ với mọi $i \in \{1;...;k-1\}$ và $\alpha - x_k < 0 < \beta - x_1$. Như vậy ta có:

$$-1 = \frac{P'(\alpha)}{P(\alpha)} = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{\alpha - x_j} + \frac{1}{\alpha - x_k} < \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{\beta - x_j} + \frac{1}{\beta - x_k} = -1, \text{ vô lý.}$$

14. (VMS 2007). Chứng minh rằng nếu tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c,\ (a,b,c \in \mathbb{R})$ có nghiệm thì ít nhất một nguyên hàm của nó là đa thức bậc ba có các nghiệm đều thực.

Giải

- Nếu $f(x)$ có nghiệm kép, thì $f(x) = (x - x_0)^2$. Dễ dàng chọn được nguyên hàm dạng:

$$F(x) = \frac{1}{3}(x - x_0)^3.$$

- Nếu $f(x)$ có 2 nghiệm phân biệt $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)$ trong đó $x_1 < x_2$.

Ký hiệu $F_0(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}bx^2 + cx$ là đa thức bậc ba. Vì $F_0'(x) = 0$ tại hai giá trị phân biệt x_1, x_2 nên $F_0(x)$ có một điểm cực đại và một điểm cực tiểu. Gọi m, M lần lượt là giá trị cực tiểu, cực đại của $F_0(x)$. Khi đó với bất kì $c \in (m, M)$ thì hàm số $F(x) = F_0(x) - c$ có ba nghiệm

15. (imomath.com). Tìm tất cả các đa thức P thỏa mãn:

$$P^2(x) + P^2\left(\frac{1}{x}\right) = P(x^2)P\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Giải

Bổ đề: Tồn tại một đa thức Q sao cho $P(x) = Q(x^2)$ hoặc $P(x) = xQ(x^2)$.

Đối với trường hợp thứ nhất ta có: $Q^2(x^2) + Q\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = Q(x^4)Q\left(\dfrac{1}{x^4}\right)$, do đó:

$Q^2(x) + Q\left(\dfrac{1}{x}\right) = Q(x^2)Q\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ (đó chính là mối quan hệ được thực hiện bởi P)

Đối với trường thứ hai ta có: $xQ^2(x) + \dfrac{1}{x}Q\left(\dfrac{1}{x}\right) = Q(x^4)Q\left(\dfrac{1}{x^4}\right)$

(không thể xảy ra vì vế trái là đa thức bậc lẻ, còn vế phải là đa thức bậc chẵn)

Khi đó: $P(x) = Q(x^2)$. Đến đây dễ dàng suy ra được rằng $P(x) \equiv C, \forall x \in \mathbb{R}$.

16.(imomath.com). Có tồn tại hay không một đa thức phi tuyến P và Q thỏa:
$P\left(Q\left(x\right)\right)=\left(x-1\right)\left(x-2\right)....\left(x-15\right)$?

Giải

Giả sử rằng có tồn tại hai đa thức như vậy. Thế thì $\deg P.\deg Q=15$, vì vậy $\deg P=k\in\left\{3;5\right\}$. Đặt $P\left(x\right)=c\left(x-a_1\right)\left(x-a_2\right)...\left(x-a_k\right)$.

Khi đó: $P\left(Q\left(x\right)\right)=c\left(Q\left(x\right)-a_1\right)\left(Q\left(x\right)-a_2\right)...\left(Q\left(x\right)-a_k\right)=\left(x-1\right)\left(x-2\right)...\left(x-15\right)$.

Như vậy các nghiệm của đa thức $Q\left(x\right)-a_i$ là phân biệt và bao gồm tập $\left\{1;2;...;15\right\}$.

Tất cả các đa thức chỉ khác nhau ở hệ số tự do. Bây giờ ta khảo sát tính chẵn lẻ của các hệ số còn lại (ba hoặc năm). Ta kết luận rằng mỗi đa thức trong số đó có nhiều nghiệm lẻ bằng nhau. Điều này là không thể vì tổng số nghiệm lẻ là 8, không chia hết chia hết cho 3 hoặc 5.

17. (imomath.com). Xác định tất cả các đa thức P mà

$$P^2\left(x\right)-2=2P\left(2x^2-1\right),\forall x\in\mathbb{R}.$$

Giải

Ký hiệu $P\left(1\right)=a$. Ta có: $a^2-2a-2=0$. Thay $P\left(x\right)=\left(x-1\right)P_1\left(x\right)$ vào điều kiện ban đầu và thu gọn ta được: $\left(x-1\right)P_1^2\left(x\right)+2aP_1\left(x\right)=4\left(x+1\right)P_1\left(2x^2-1\right)$.

Cho $x=1$ (với $a\neq 4$) ta được: $P_1\left(1\right)=1$, nghĩa là $P_1\left(x\right)=\left(x-1\right)P_2\left(x\right)$.

Vì thế $P\left(x\right)=\left(x-1\right)^2P_2\left(x\right)+a$. Giả sử rằng $P\left(x\right)=\left(x-1\right)^nQ\left(x\right)+a$, $Q\left(1\right)\neq 0$.

Thay vào điều kiện ban đầu và rút gọn ta thu được:

$\left(x-1\right)^nQ^2\left(x\right)+2aQ\left(x\right)=2\left(2x+2\right)^nQ\left(2x^2-1\right)$.

Đến đây ta tìm được $Q\left(1\right)=0$ là điều mâu thuẫn. Do đó: $P\left(x\right)=a$.

18.(imomath.com). Xác định tất cả các đa thức P mà $P^2\left(x\right)-1=4P\left(x^2-4x-1\right)$.

Giải

Giả sử $P\left(x\right)$ không phải là hàm hằng. Đặt $\deg P=n\geq 1$ và so sánh hệ số ở hai vế của phương trình đã cho, ta suy ra rằng các hệ số của đa thức $P\left(x\right)$ phải hữu tỉ. Mặt khác cho $x=a$ với $a=a^2-4a+1\Leftrightarrow a=\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}$, ta được:

$P\left(a\right)=b$ với $b^2-4b-1=0\Leftrightarrow b=2\pm\sqrt{5}$.

Tuy nhiên, điều này không thỏa mãn vì $P\left(a\right)$ phải có dạng: $p+q\sqrt{21}$ với $p,q\in\mathbb{Q}$ cho các hệ số của P là hữu tỉ. Do đó: tỉ. Do đó: $P\left(x\right)\equiv C$.

19.(imomath.com). Có tồn tại hay không một giá trị thực của a mà tồn tại một phân thức hữu tỉ $f\left(x\right)$ thỏa mãn $f\left(x^2\right)=f^2\left(x\right)-a$?

Giải

Viết f dưới dạng $f=\dfrac{P}{Q}$ với P,Q là hai đa thức nguyên tố cùng nhau và Q là đa thức monic. Bằng cách so sánh hệ số ta suy ra: P cũng là đa thức monic.

Điều kiện của bài toán trở thành: $\dfrac{P\left(x^2\right)}{Q\left(x^2\right)}=\dfrac{P^2\left(x\right)}{Q^2\left(x\right)}-a$. Từ $P\left(x^2\right)$ và $Q\left(x^2\right)$ nguyên tố cùng nhau (nếu ngược lại thì chúng có ước chung là 0) dẫn đến $Q\left(x^2\right)=Q^2\left(x\right)$.

Do đó $Q\left(x\right)=x^n,\forall n\in\mathbb{N}$. Bây giờ ta có: $P\left(x^2\right)=P^2\left(x\right)-ax^{2n}$.

Đặt $P\left(x\right)=a_0+a_1x+...+a_{m-1}x^{m-1}+a_mx^m$. So sánh các hệ số của $P^2\left(x\right)$ và $P\left(x^2\right)$ ta được:

$a_{n-1}=...=a_{2m-n+1}=0$; $a_{2m-n}=\dfrac{a}{2}$; $a_1=...=a_{m-1}=0$ và $a_0=1$.

Điều này chỉ có thể xảy ra nếu $a=2$ và $2m-n=0$ hoặc $a=0$.

20.(imomath.com). Tìm tất cả các bộ bốn đa thức $\left(P_1,P_2,P_3,P_4\right)$ sao cho với bất kì số tự nhiên x,y,z,t nào thỏa mãn $xy-zt=1$, chứng tỏ rằng: $P_1\left(x\right)P_2\left(y\right)-P_3\left(z\right)P_4\left(t\right)$.

Giải

Rõ ràng $P_1\left(x\right)P_2\left(y\right)=P_2\left(x\right)P_1\left(y\right)$, $\forall x,y\in\mathbb{N}$.

Điều này có nghĩa là $\dfrac{P_2\left(x\right)}{P_1\left(x\right)}$ độc lập với x. Do đó $P_2=cP_1$ với c là hằng số bất kì.

Tương tự: $P_4=dP_3$ với d là hằng số bất kì.

Bây giờ ta có: $cP_1\left(x\right)P_1\left(y\right)-dP_3\left(z\right)P_3\left(t\right)=1$, $\forall x,y,z,t\in\mathbb{N}$ và $xy-zt=1$.

Hơn nữa, ta thấy rằng $P_1\left(x\right)P_1\left(y\right)$ chỉ phụ thuộc vào xy, chẳng hạn $f\left(x\right)=P_1\left(x\right)P_1\left(\dfrac{n}{x}\right)$ là giống nhau cho tất cả các ước nguyên dương x của số tự nhiên n. Từ $f\left(x\right)$ là một phân thức hữu tỉ và số các ước x của n có thể lớn tùy ý. Do đó f là không đổi trong x. Dễ dàng có được điều này khi và chỉ khi $P_1\left(x\right)=x^n,P_3\left(x\right)=x^m,\forall m,n$ và $c\left(xy\right)^n-d\left(zt\right)^m=1$.

Do đó: $m=n$ và $c=d=1$. Cuối cùng $m=n=1$. Vậy $P_1\left(x\right)=P_2\left(x\right)=P_3\left(x\right)=P_4\left(x\right)=x$.

21.(imomath.com). (IMO 2004). Tìm tất cả các đa thức $P\left(x\right)$ với hệ số thực thỏa mãn:

$P\left(a-b\right)+P\left(b-c\right)+P\left(c-a\right)=2P\left(a+b+c\right)$, $\forall a,b,c\in\mathbb{R}$ sao cho $ab+bc+ca=0$.

Giải

Đặt $P\left(x\right)=a_0+a_1x+...+a_nx^n$. Với mỗi $x\in\mathbb{R}$, bộ ba $\left(a;b;c\right)=\left(6x;3x;-2x\right)$ thỏa mãn điều kiện: $ab+bc+ca=0$. Các điều kiện của P cho ta $P\left(3x\right)+P\left(5x\right)+P\left(-8x\right)=2P\left(7x\right),\forall x\in\mathbb{R}$. Điều đó có ngụ ý rằng cho tất cả $i=0,1,2,...,n$ ta có được những đẳng thức sau: $\left(3^i+5^i+\left(-8\right)^i-2.7^i\right)a_i=0$.

Giả sử rằng $a_i \neq 0$. Thế thì $K(i) := 3^i + 5^i + (-8)^i - 2.7^i = 0$. Nhưng $K(i) < 0$ với mọi i lẻ và $K(i) > 0$ với mọi $i = 0$ hoặc $i \geq 6$ chẵn. Chỉ có $i \in \{2;4\}$ cho ta $K(i) = 0$.

Do đó: $P(x) = a_2x^2 + a_4x^4$ với a_2, a_4 là các số thực. Thử lại thấy các đa thức xác định như vậy luôn thỏa mãn yêu cầu bài toán.

22.(imomath.com). Chứng minh rằng: nếu các đa thức P và Q có một nghiệm thực và $P(1 + x + Q^2(x)) = Q(1 + x + P^2(x))$ thì $P \equiv Q$.

Giải

Lưu ý rằng tồn tại $x = a$ mà $P^2(a) = Q^2(a)$.

Điều này suy ra từ thực thế rằng: nếu p, q tương ứng là nghiệm của P, Q thì

$P^2(p) - Q^2(p) \leq 0 \leq P^2(q) - Q^2(q)$ và hơn thế nữa $P^2 - Q^2$ là liên tục.

Bây giờ $P(b) = Q(b)$ với $b = 1 + a + P^2(a)$. Lấy một số thực lớn nhất mà $P(a) = Q(a)$, dẫn đến một điều mâu thuẫn ngay lập tức.

23. (Putnam 1940). Hãy tìm tất cả các bộ ba số hữu tỉ $(a;b;c)$ là những nghiệm của phương trình:

$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

Giải

Theo định lý Viéte ta có: $a + b + c = -a$; $bc + ca + ab = b$; $abc = -c$.

- Nếu $c = 0$ thì $2a + b = 0; ab = b$. Ta thu được hai cặp $(0;0;0), (1;-2;0)$.

- Nếu $c \neq 0$ thì ta xét hai trường hợp sau:

+ Với $a + b = 0$,ta thu được hệ phương trình: $c = -a; ad = b; ab = -1$.

Bằng cách giải hệ phương trình ta thu được nghiệm $(1;-1;-1)$.

+ Với $a + b \neq 0$, ta loại trừ b và c dẫn đến phương trình: $2a^3 + 2a^2 - 1 = 0$ không có nghiệm hữu tỉ.

Suy ra nghiệm của bài toán gồm: $(0;0;0), (1;-2;0), (1;-1;-1)$.

24. (Putnam 1963). Hãy tìm số nguyên a sao cho đa thức $x^{13} + x + 90$ chia hết cho $x^2 - x + a$.

Giải

Ta thấy $x^{13} + x + 90 = (x^2 - x + a)Q(x)$, $a \in \mathbb{Z}$ và $Q(x)$ là một đa thức.

Khi đó những hệ số của $P(x)$ là những hệ số nguyên. Nếu giả sử $a \leq 0$ ta sẽ nhận được $x^2 - x + a$ và $x^{13} + x + 90$ có nghiệm không âm (theo cách đặt ở trên). Trong cùng lúc đó $x^{13} + x + 90$ hiển nhiên không có như vậy. Suy ra $a > 0$.

Bằng cách đặt như trong cách đặt ở trên suy ra: $x = -1, x = 0$, $x = 1$, ta nhận được những đẳng thức:

$(a + 2)Q(-1) = 88$, $aQ(0) = 90$, $aQ(1) = 92$.

Từ hai đẳng thức sau cùng ta suy ra: $2 \vdots a$. Do đó $a = 1$ hoặc $a = 2$.

Nhưng nếu $a = 1$ thì từ đẳng thức thứ nhất: 88 chia hết cho 3, điều này không thể được. Chỉ còn một trường hợp $a = 2$.

Thật vậy $x^{13} + x + 90 = (x^2 - x + 2)(x^{11} + x^{10} - x^9 - 3x^8 - x^7 + 5x^6 + 7x^5 - 3x^4 - 7x^3 - 11x^2 + 23x + 45)$

25. (Putnam 1985). Cho k là số nguyên dương nhỏ nhất với tính chất sau: tồn tại những số nguyên khác nhau m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 sao cho giá trị nhỏ nhất này đạt được.

Giải

Cho $P\left(x\right)=x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$. Vì những số m_1,m_2,m_3,m_4,m_5 là khác nhau nên những hệ số d và e không thể bằng 0.

Ngoài ra $a^2=\left(m_1+m_2+m_3+m_4+m_5\right)^2=\sum_{t=1}^{5}m_t^2+2\sum_{i<j}m_im_j=\sum_{t=1}^{5}m_t^2+2a$

hay $\sum_{t=1}^{5}m_t^2=a^2-2b$. Suy ra a,b không thể đồng thời bằng 0.

Như vậy đã chứng minh $k\geq 3$ (những hệ số khác 0 là: 1 trước x^5, một trong những hệ số a và b, một trong các hệ số c và d).

Nếu $m_1=-5,m_2=-1,m_3=0,m_4=1,m_5=2$ ta nhận được:

$$P\left(x\right)=x\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)=x^5-5x^3+4x$$

nghĩa là với những giá trị này ta có $k=3$.